Es sei Σ ein Flächenstück mit der (regulären) Parametrisierung

$$\Phi : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}^3, \qquad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1(u,v) \\ \Phi_2(u,v) \\ \Phi_3(u,v) \end{pmatrix}$$

und der Einheitsnormalen $\vec{n}$.

Ferner seien

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z),$$

eine skalare Funktion und

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix},$$

ein Vektorfeld.

Das Integral von f über Σ ist durch

$$\iint_\Sigma f\, dA = \int_c^d \int_a^b (f \circ \Phi)(u,v) \left| \Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) \right| du\, dv \tag{1}$$

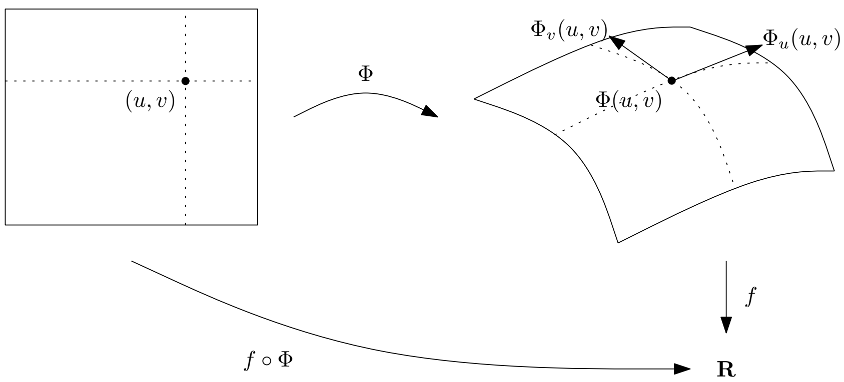
gegeben, wobei[1]

$$(f \circ \Phi)(u,v) = f\left(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v), \Phi_3(u,v)\right)$$

und $\left|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\right|$ die Länge des Vektors

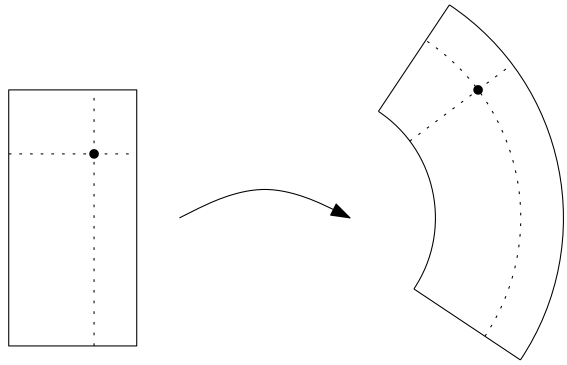
$$\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\Phi_1(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u}\Phi_2(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u}\Phi_3(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v}\Phi_1(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial v}\Phi_2(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial v}\Phi_3(u,v) \end{pmatrix} \tag{2}$$

bezeichnet.



Die Formel (1) sagt im wesentlichen, dass wir das Integral von f über Σ auf ein Integral über dem Parameterbereich zurückführen können, indem wir f mit Φ auf diesen "zurückziehen" und das "Flächenelement" $du\,dv$ entsprechend skalieren (die Länge des Vektors (2) entspricht der Fläche des von $\Phi_u(u,v)$ und $\Phi_v(u,v)$ aufgespannten Parallelogramms).

Beispiel. Parametrisieren wir einen Ringteil in der x-y-Ebene



mittels Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 < r_0 < r < r_1, \quad 0 < \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 < 2\pi,$$

so nimmt (1) folgende Form an:

$$\iint_\Sigma f\, dA = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{r_0}^{r_1} f\,(r\cos\phi, r\sin\phi, 0)\; r\, dr\, d\varphi, \tag{3}$$

wobei wir benutzt haben, dass die Länge des Vektors

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

gerade $r > 0$ ist. Die Formel (3) entspricht für Funktionen in der Ebene der in der Vorlesung besprochenen Integrationsformel in Polarkoordinaten.

Der Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch Σ ist durch

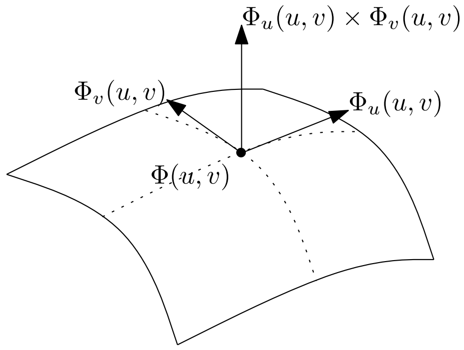
$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA \tag{4}$$

gegeben. Die rechte Seite ist dabei wiederum durch (1) definiert.

Sofern die Parametrisierung Φ des Flächenstücks Σ orientierungstreu ist, lässt sich die Einheitsnormale $\vec{n}$ im Punkt $\Phi(u, v)$ darstellen durch

$$\left(\vec{n}\circ\Phi\right)(u, v) = \frac{\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)}{\left|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\right|}. \tag{5}$$

Das ist so, weil die Vektoren $\Phi_u(u, v)$ und $\Phi_v(u, v)$ im Punkt $\Phi(u, v)$ der Fläche Σ tangential sind, so dass ihr Vektorprodukt (2) dort senkrecht zur Tangentialebene steht. Normieren wir das Produkt so, dass es die Länge 1 hat, so erhalten wir gerade den Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$.



Mit (1) und (5) nimmt die Formel (4) die folgende Form an:

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_c^d \int_a^b (F \circ \Phi)(u,v) \cdot \big(\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\big)\, du\, dv, \tag{6}$$

in der das skalierte Flächenelement wegen

$$\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \frac{\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)}{\big|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\big|} \big|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\big|$$

nicht explizit auftritt.

Beispiel. Der Fluss des Vektorfelds

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(1-e^z) \\ 0 \\ e^z \end{pmatrix} \qquad \text{durch} \qquad \Sigma = \big\{(x,y,0) \,\big|\, x^2 + y^2 \le 1\big\}$$

mit der von der x-y-Ebene induzierten Orientierung ist (Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} r\cos\varphi(1-e^0) \\ 0 \\ e^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0+0+r)\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 r\, dr = \pi \end{aligned}$$

vgl. Serie 9 Aufgabe 5. Natürlich sehen wir in diesem Fall sofort, dass

$$\vec{F}(x,y,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und dass} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Einheitsnormalenvektor von Σ ist und es folgt direkt

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_\Sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 1\, r\, dr\, d\varphi = \pi$$

mit den Formeln (3) und (4).

---

[1] Allgemein bezeichnet man mit $g \circ f$ die Komposition zweier Abbildungen f und g, d.h. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für jeden Punkt x im Definitionsbereich von f.