Musterlösungen zu Serie 13 (Ferienserie)

1. **a)** Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1+\lambda)\left((2-\lambda)(1+\lambda)-2\right) = (1+\lambda)(1-\lambda)\lambda$$

hat die Wurzlen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$.

Für die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ folgt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und da alle Eigenwerte verschieden sind, ist jede Lösung von der Form

$$\vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

b) Da die zweite Gleichung von den ersten und dritten „entkoppelt“ ist, führt der Ansatz $\vec{y}_{p_1} = \begin{pmatrix} Ae^{2x} & 0 & Be^{2x} \end{pmatrix}^T$ auf eine partikuläre Lösung. Aus

$$\begin{pmatrix} 2Ae^{2x} \\ 0 \\ 2Be^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{2x} \\ 0 \\ Be^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2A-2B+1)e^{2x} \\ 0 \\ (A-B)e^{2x} \end{pmatrix}$$

finden wir durch Koeffizientenvergleich $A = \frac{3}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$.

Bitte wenden!

Somit ist jede Lösung von der Form

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_1}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{3}{2}\, e^{2x} \\ 0 \\ c_1 + \frac{1}{2}\, e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

c) Mit dem der Ansatz $\vec{y}_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $0 = -C + 6$, also $\vec{y}_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_2}(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 6 \\ c_1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

d) Die Inhomogenität ist gerade die Summe der beiden in den vorigen Teilaufgaben behandelten Inhomogenitäten. Daher ist die Summe $\vec{y}_{p_1} + \vec{y}_{p_2}$ eine partikuläre Lösung und für die allgemeine Lösung gilt

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_1}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{3}{2}\, e^{2x} \\ 6 \\ c_1 + \frac{1}{2}\, e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

2. **a)** Wir erinnern zunächst daran, dass eine lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ stets ein *Fundamentalsystem* von n linear unabhängigen Lösungen besitzt und sich somit jede Lösung von (1) als Linearkombination dieses Systems ergibt. Hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \tag{2}$$

die Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit der jeweiligen Vielfachheit $k_1, \ldots, k_r$, so bilden

$$\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \cdots & x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & x e^{\lambda_2 x}, & \cdots & x^{k_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_r x}, & x e^{\lambda_r x}, & \cdots & x^{k_r - 1} e^{\lambda_r x}, \end{array}$$

ein solches System von $n = k_1 + \cdots + k_r$ Funktionen.

Siehe nächstes Blatt!

i) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = \left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1\right)\lambda = (\lambda - 1)^3\,\lambda$$

hat die einfache Wurzel 0 und die dreifache Wurzel 1. Daher bilden

$$1 = e^0 \quad \text{und} \quad e^x, \quad xe^x, \quad x^2e^x$$

ein Fundamentalsystem und jede reelle Lösung ist von der Form

$$y(x) = A + Be^x + Cxe^x + Dx^2e^x$$

mit reellen Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ in Gleichung (1) reell, so ist mit jeder k-fachen Wurzel $\lambda = a + ib$ des charakteristischen Polynoms auch $\bar{\lambda} = a - ib$ eine solche Wurzel. Mit den Eulerschen Formeln

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

erhalten wir so aus den $2k$ linear unabhängigen komplexen Lösungen

$$\begin{array}{llll} e^{(a+ib)x}, & xe^{(a+ib)x}, & \cdots & x^{k_1-1}e^{(a+ib)x}, \\ e^{(a-ib)x}, & xe^{(a-ib)x}, & \cdots & x^{k_1-1}e^{(a-ib)x}, \end{array}$$

durch Bilden von Linearkombinationen die $2k$ reellen Lösungen

$$\begin{array}{llll} e^{ax}\cos(bx), & xe^{ax}\cos(bx), & \cdots & x^{k_1-1}e^{ax}\cos(bx), \\ e^{ax}\sin(bx), & xe^{ax}\sin(bx), & \cdots & x^{k_1-1}e^{ax}\sin(bx). \end{array}$$

Die lineare Differentialgleichung (1) besitzt also (im Fall reeller Koeffizienten) stets ein Fundamentalsystem von n reellen linear unabhängigen Lösungen, auch wenn die Wurzeln des charakteristischen Polynoms nicht alle reell sind.

ii) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2\right)^2 + 2\left(\lambda^2\right) + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2$$

besitzt die doppelten Wurzeln i und $-i$. Daher ist

$$\cos x, \quad x\cos x, \quad \sin x, \quad x\sin x,$$

ein Fundamentalsystem und jede reelle Lösung ist von der Form

$$y(x) = (A + Bx)\cos x + (C + Dx)\sin x$$

mit reellen Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

iii) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 = \left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right)\lambda^2$$

hat die doppelte Wurzel 0 und die einfachen Wurzeln $1 \pm 2i$. Daher ist

$$1, \quad x, \quad e^x \cos(2x), \quad e^x \sin(2x)$$

ein Fundamentalsystem und jede reelle Lösung ist von der Form

$$y(x) = A + Bx + Ce^x \cos(2x) + De^x \sin(2x)$$

mit reellen Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

iv) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = \left(\lambda^2\right)^2 + 4\left(\lambda^2\right) + 4 = \left(\lambda^2 + 2\right)^2$$

hat die doppelten Wurzeln $\pm\sqrt{2}\,i$. Daher ist

$$\cos\left(\sqrt{2}\,x\right), \quad x\cos\left(\sqrt{2}\,x\right), \quad \sin\left(\sqrt{2}\,x\right), \quad x\sin\left(\sqrt{2}\,x\right),$$

ein Fundamentalsystem und jede reelle Lösung ist von der Form

$$y(x) = (A + Bx)\cos\left(\sqrt{2}\,x\right) + (C + Dx)\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$$

mit reellen Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

b) Wir bemerken zunächst: hat eine lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = q(x) \tag{3}$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ eine Inhomogenität der Gestalt

$$q(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)\, e^{\mu x},$$

wobei μ eine k-fache Wurzel des charakteristischen Polynoms (2) ist ($k = 0$ bedeutet $p(\mu) \neq 0$), so besitzt (3) die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)\, x^k e^{\mu x},$$

für $m = 0$ ist speziell $y_p(x) = \dfrac{b_0 x^k e^{\mu x}}{p^{(k)}(\mu)}$.

Die allgemeine Lösung von (3) setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (1) und einer partikulären Lösung von (3) zusammen.

Für die in Frage stehende Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \left(\lambda^2 - 1\right)\lambda$ mit den drei einfachen Wurzeln 0, 1 und -1 und dem Fundamentalsystem 1, e^x, e^{-x}.

Siehe nächstes Blatt!

i) Die Inhomogenität ist (in obiger Notation) von der Gestalt

$$q(x) = e^{2x} = b_0 e^{\mu x} \quad \text{mit} \quad b_0 = 1, \quad \mu = 2, \quad m = k = 0,$$

also ist $y_p(x) = \dfrac{e^{2x}}{8-2} = \dfrac{e^{2x}}{6}$ eine partikuläre Lösung und somit

$$y(x) = A + Be^x + Ce^{-x} + \frac{e^{2x}}{6}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

ii) Die Inhomogenität ist von der Gestalt

$$q(x) = e^x = b_0 e^{\mu x} \quad \text{mit} \quad b_0 = 1, \quad \mu = 1, \quad m = 0, \quad k = 1,$$

also ist $y_p(x) = \dfrac{xe^x}{3-1} = \dfrac{xe^x}{2}$ eine partikuläre Lösung und somit

$$y(x) = A + \left(B + \frac{x}{2}\right) e^x + Ce^{-x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

iii) Die Inhomogenität ist von der Gestalt

$$q(x) = x^2 = b_2 x^2 e^{\mu x} \quad \text{mit} \quad b_2 = 2, \quad \mu = 0, \quad m = 2, \quad k = 1,$$

also ist $y_p(x) = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right) x$ für gewisse $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich aus

$$\begin{aligned} x^2 = q(x) = y_p^{(3)} - y_p' &= 6c_2 - \left(c_0 + 2c_1 x + 3c_2 x^2\right) \\ &= 6c_2 - c_0 - 2c_1 x - 3c_2 x^2 \end{aligned}$$

$c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_1 = 0$, $c_0 = 6c_2 = -2$ und somit

$$y(x) = A + Be^x + Ce^{-x} + -\frac{x^3}{3} - 2x, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ in Gleichung (3) reell und ist die Inhomogenität der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Funktion $q(x)$ der obigen Gestalt, so ist offenbar der Real- bzw. Imaginärteil der oben angegebenen Funktionen y_p eine partikulären Lösungen der Gleichung (3).

iv) Die Inhomogenität ist von der Gestalt

$$q(x) = \cos x = \operatorname{Re}\left(b_0 e^{\mu x}\right) \quad \text{mit} \quad b_0 = 1, \quad \mu = i, \quad m = 0, \quad k = 0,$$

also ist $y_p(x) = \operatorname{Re} \dfrac{e^{ix}}{i^3 - i} = \operatorname{Re} \dfrac{ie^{ix}}{2} = -\dfrac{\sin x}{2}$ eine partikuläre Lösung und

$$y(x) = A + Be^x + Ce^{-x} - \frac{\sin x}{2}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Bitte wenden!

3. **a)** Das charakteristische Polynom

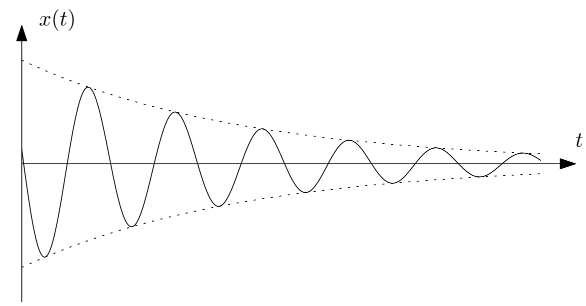
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2d\lambda + k$$

hat die Wurzeln $\lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - k}$.

i) In diesem Fall gilt $\lambda_{1,2} = -d \pm i\omega_0$ mit $\omega_0 = \sqrt{k - d^2}$, also

$$x(t) = c_1 e^{-dt} \cos(\omega_0 t) + c_2 e^{-dt} \sin(\omega_0 t) = A e^{-dt} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

für gewisse Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bzw. eine gewisse Amplitude A und eine gewisse Phase φ (vgl. dazu die Ausführungen in Serie 2 Aufgabe 2).

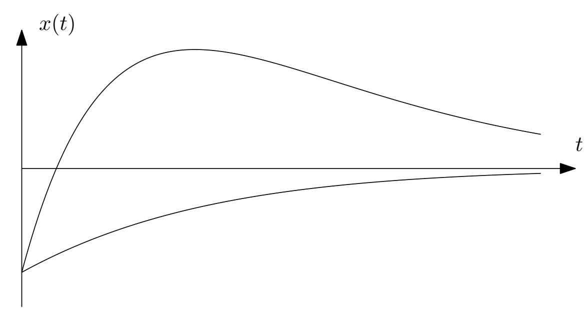


Insbesondere klingt jede Lösung exponentiell auf 0 ab.

ii) In diesem Fall ist $\lambda = -d$ eine doppelte Wurzel und

$$x(t) = c_1 e^{-dt} + c_2 t e^{-dt} = (c_1 + c_2 t)\, e^{-dt}.$$

In diesem Fall klingt also jede nicht-triviale Lösung exponentiell auf 0 ab, hat höchstens ein Extremum und geht höchstens einmal durch 0.



iii) In diesem Fall gilt $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ und

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Wegen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ klingt auch in diesem Fall jede Lösung $\neq 0$ exponentiell auf 0 ab, hat höchstens ein Extremum und geht höchstens einmal durch 0.

Siehe nächstes Blatt!

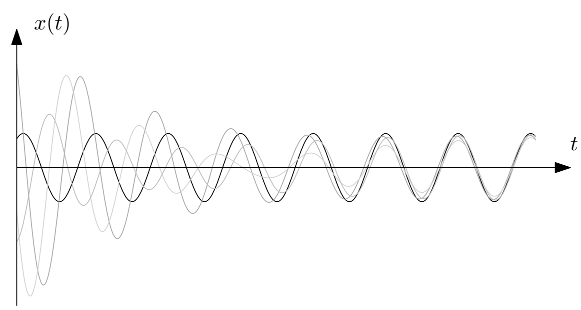
b) Eine partikuläre Lösung ist durch

$$x_p(t) = \mathrm{Re}\,\frac{Ke^{i\omega t}}{k-\omega^2+2di\omega} = \mathrm{Re}\,\frac{Ke^{i\omega t}\left(k-\omega^2-2di\omega\right)}{\left(k-\omega^2\right)^2+4d^2\omega^2}$$
$$= \frac{K\left(k-\omega^2\right)\cos\omega t}{\left(k-\omega^2\right)^2+4d^2\omega^2} + \frac{2Kd\omega\sin\omega t}{\left(k-\omega^2\right)^2+4d^2\omega^2} = A\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$

gegeben, wobei

$$A = \frac{K\sqrt{\left(k-\omega^2\right)^2+4d^2\omega^2}}{\left(k-\omega^2\right)^2+4d^2\omega^2} = \frac{K}{\sqrt{\left(k-\omega^2\right)^2+4d^2\omega^2}}$$

(vgl. dazu die Ausführungen in Serie 2 Aufgabe 2).



Die allgemeine Lösung setzt sich aus dieser partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung zusammen. Da letztere - wie in Teilaufgabe **a)** gezeigt - stets exponentiell auf 0 abklingen, hat somit jede Lösung dasselbe Langzeitverhalten wie diese partikuläre Lösung.

c) Es gelten

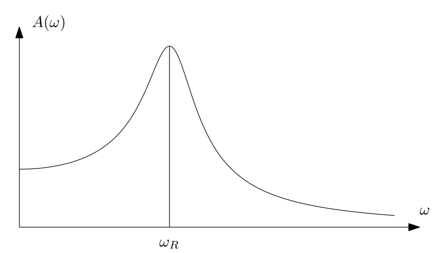
$$A'(\omega) = \frac{2K\omega\left(k-2d^2-\omega^2\right)}{\left(\left(k-\omega^2\right)^2+4d^2\omega^2\right)^{3/2}}, \quad \lim_{\omega\to 0} A(\omega) = \frac{K}{k}, \quad \lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0.$$

Ist $k \leq 2d^2$, so fällt A streng monoton auf 0 ab.

Anderenfalls wächst $A(\omega)$ streng monoton bis zur Frequenz $\omega_R = \sqrt{k-2d^2}$, in der sie das globale Maximum

$$A\left(\omega_R\right) = \frac{K}{2d}\,\frac{1}{\sqrt{k-d^2}} = \frac{K}{2d\,\omega_0}$$

erreicht und fällt anschliessend streng monoton für $\omega \to \infty$ auf 0 ab.



Bitte wenden!

4. **a)** Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ folgt für $x, y \neq 0$

$$y' = u + xu' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{2\,\frac{y}{x}} = \frac{1 + u^2}{2u},$$

also $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1 - u^2}{2u}\,\dfrac{1}{x}$ bzw. $\displaystyle\int \frac{2u\,du}{u^2 - 1} = -\int \frac{dx}{x}$ für $u \neq 1$ und somit

$$\ln|u^2 - 1| = C - \ln|x| \quad \Rightarrow \quad |u^2 - 1| = \frac{C}{|x|} \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{x + C}{x},$$

wobei C eine generische Konstante bezeichnet. Demnach ist

$$y(x) = \pm\sqrt{x(x + C)} \quad \text{und insbesondere} \quad y(1) = \pm\sqrt{1 + C} = 2,$$

also $C = 3$ und $y(x) = \sqrt{x(x + 3)}$.

b) Mit der Substitution $u = x + y + 1$ folgt

$$y' = u' - 1 = (x + y + 1)^2 = u^2,$$

also $\dfrac{du}{dx} = 1 + u^2$ bzw. $\displaystyle\int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx$ und somit

$$\arctan u = x + C \quad \Rightarrow \quad u = \tan(x + C) \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}.$$

Demnach ist

$$y(x) = \tan(x + C) - x - 1 \quad \text{und insbesondere} \quad y(0) = \tan C - 1 = -2,$$

also $C = -\frac{\pi}{4}$ und $y(x) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - x - 1$.

c) Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ folgt für $x \neq 0$

$$y' = u + xu' = \frac{y}{x}\left(1 - \ln\frac{y}{x}\right) = u\,(1 - \ln u)\,,$$

also $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{u \ln u}{x}$ bzw. $\displaystyle\int \frac{du}{u \ln u} = -\int \frac{dx}{x}$ für $u \notin \{0, 1\}$ und somit

$$\ln|\ln u| = C - \ln|x| \quad \Rightarrow \quad |\ln u| = \frac{C}{|x|} \quad \Rightarrow \quad u = e^{\frac{C}{x}},$$

wobei C eine generische Konstante bezeichnet. Demnach ist

$$y(x) = xe^{\frac{C}{x}} \quad \text{und insbesondere} \quad y(1) = e^C = e^\pi,$$

also $C = \pi$ und $y(x) = xe^{\frac{\pi}{x}}$.

Siehe nächstes Blatt!

d) Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ folgt für $x \neq 0$

$$y' = u + xu' = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right) = u\,(1-u)$$

also $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-u^2}{x}$ bzw. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dx}{x}$ für $u \neq 0$ und somit

$$\frac{1}{u} = \ln|x| - C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\ln|x| - C} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{x}{\ln|x| - C},$$

insbesondere $y(e) = \frac{e}{1-C} = \pi$, also $C = \frac{\pi - e}{\pi}$ und $y(x) = \dfrac{\pi x}{\pi(\ln|x| - 1) + e}$.

5. **a)** Die homogene Gleichung

$$y' + \frac{y}{x+1} = 0$$

lässt sich durch Separation der Variablen lösen. Für $y \neq 0$ gilt

$$\ln|y| = -\int \frac{dx}{x+1} = C - \ln|x+1| \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{C}{x+1}.$$

Mit dem Ansatz $y_p(x) = \dfrac{C(x)}{x+1}$ ergibt sich

$$y_p' = \frac{C'}{x+1} - \frac{C}{(x+1)^2} = e^{-x} - \frac{y_p}{x+1} = e^{-x} - \frac{C}{(x+1)^2},$$

also $C' = (x+1)e^{-x}$ und damit

$$C = \int (x+1)e^{-x}\,dx = D - (x+2)e^{-x}.$$

also $y(x) = \dfrac{D - (x+2)e^{-x}}{x+1}$ für ein $D \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung

$$0 = y(x) = D - 2 \qquad \text{folgt} \qquad y(x) = \frac{2 - (x+2)e^{-x}}{x+1}.$$

b) Die homogene Gleichung $y' + 4xy = 0$ lässt sich durch Separation lösen:

$$\ln|y| = -4\int x\,dx = C - 2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = Ce^{-2x^2}$$

für $y \neq 0$. Mit dem Ansatz $y_p(x) = C(x)e^{-2x^2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} y_p' &= C'e^{-2x^2} - 4Cxe^{-2x^2} \\ &= 4xe^{-2x^2} - 4xy_p = 4xe^{-2x^2} - 4Cxe^{-2x^2}, \end{aligned}$$

Bitte wenden!

also $C' = 4x$ und damit $C = 4\displaystyle\int x\,dx = 2x^2 + D$. Somit ist

$$y(x) = \left(2x^2 + D\right) e^{-2x^2}, \quad \text{insbesondere} \quad 3 = y(0) = D$$

und somit $y(x) = \left(2x^2 + 3\right) e^{-2x^2}$.

c) Die homogene Gleichung $y' = y/x$ lässt sich durch Separation lösen:

$$\ln|y| = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| - C \qquad \Rightarrow \qquad y = Cx$$

für $y \neq 0$. Mit dem Ansatz $y_p(x) = C(x)x$ ergibt sich

$$xy_p' = C'x^2 + Cx = y_p + x^2 + x + 1 = Cx + x^2 + x + 1$$

also $C' = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ und damit

$$C = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \ln x + x - \frac{1}{x} + D,$$

also $y(x) = (D + \ln x)x + x^2 - 1$ für ein $D \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung

$$-3 = y(1) = D \qquad \text{folgt} \qquad y(x) = (\ln x - 3)x + x^2 - 1.$$

d) Die homogene Gleichung $y' \sin x = y \cos x$ lässt sich durch Separation lösen:

$$\ln|y| = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \ln|\sin x| - C \qquad \Rightarrow \qquad y = C \sin x$$

für $y \neq 0$. Mit dem Ansatz $y_p(x) = C(x)\sin x$ ergibt sich

$$\begin{aligned} y_p' \sin x &= C' \sin^2 x + C \sin x \cos x \\ &= y_p \cos x + 4\sin^4 x = C \sin x \cos x + 4 \sin^4 x \end{aligned}$$

also $C' = 4\sin^2 x$ und damit

$$C = 4 \int \sin^2 x\,dx = 2x - \sin(2x) - D,$$

also $y(x) = (2x - \sin(2x) - D)\sin x$. Aus der Anfangsbedingung

$$0 = y(\pi/2) = \pi - D \qquad \text{folgt} \qquad y(x) = (2x - \sin(2x) - \pi)\sin x.$$