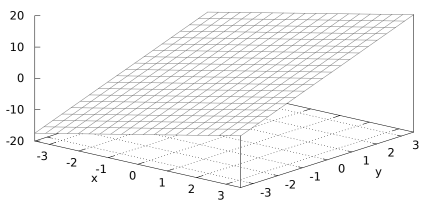
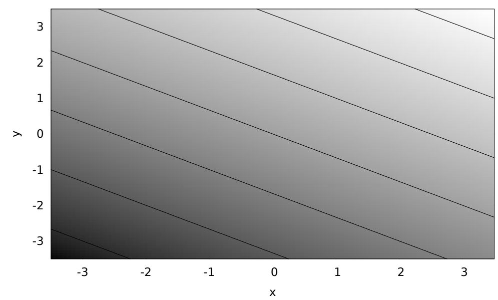
Dr. Ana Cannas da Silva

Musterlösungen zu Serie 1

1. **a)** Der Graph der Funktion f ist die Ebene $2x + 3y - z = 0$ im $\mathbb{R}^3$. Die Niveaulinie der Funktion f zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist die durch $2x + 3y = c$ bzw. $y = -\frac{2}{3}\,x + \frac{c}{3}$ gegebene Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Steigung $-2/3$.



Der Graph von f

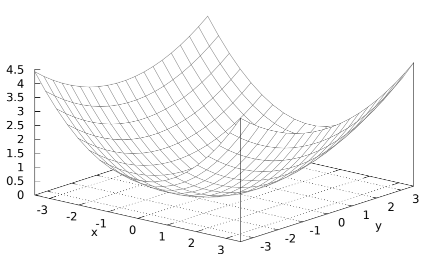


Das Niveaulinienportrait von f

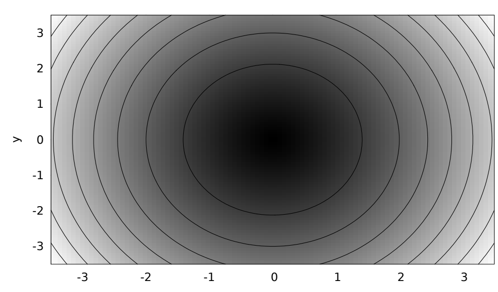
b) Der Graph von g erfüllt die Gleichung $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$. Die Schnittkurven für festgehaltene Werte $y = y_0$ und $x = x_0$ bzw. die Graphen der Funktionen

$$x \mapsto g(x, y_0) = \frac{x^2}{4} + \frac{y_0^2}{9}, \qquad \text{und} \quad y \mapsto g(x_0, y) = \frac{x_0^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

sind nach oben geöffnete Parabeln. Der Graph von g ist also ein sogenanntes *elliptisches Paraboloid*. Das Niveaulinienportrait von g setzt sich zusammen aus dem Ursprung (Niveau 0) und den Ellipsen $\left(\frac{x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{y}{3c}\right)^2 = 1$ (Niveau $c^2 > 0$).



Der Graph von g



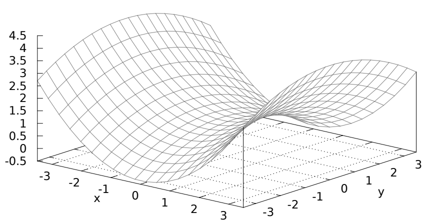
Das Niveaulinienportrait von g

Bitte wenden!

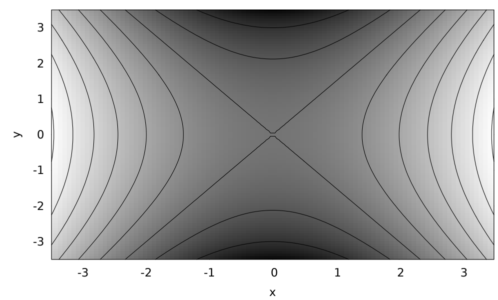
c) Der Graph von φ erfüllt die Gleichung $z - 1 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$. Die Schnittkurven für festgehaltene Werte $y = y_0$ und $x = x_0$ bzw. die Graphen der Funktionen

$$x \mapsto \varphi(x, y_0) = \frac{x^2}{4} - \frac{y_0^2}{9} + 1, \qquad \text{und} \quad y \mapsto \varphi(x_0, y) = \frac{x_0^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 1$$

sind nach oben bzw. unten geöffnete Parabeln. Der Graph von φ ist also ein sogenanntes *hyperbolisches Paraboloid*. Das Niveaulinienportrait von φ setzt sich zusammen aus den beiden Winkelhalbierenden (Niveau 1) und den Hyperbeln $y = \pm\frac{3\sqrt{x^2+4(1-c)}}{2}$ und $x = \pm\frac{2\sqrt{y^2+9(c-1)}}{3}$ (zum Niveau c).

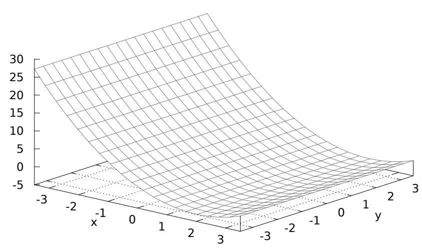


Der Graph von φ

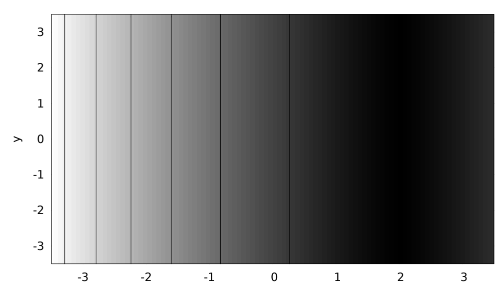


Das Niveaulinienportrait von φ

d) Der Graph von ψ ist ein parabolischer Zylinder. Die Niveaulinien von ψ sind die Geraden $x = \pm\sqrt{c+3} + 2$, $c \geq -3$, parallel zur y-Achse.



Der Graph von ψ



Das Niveaulinienportrait von ψ

2. **a)** Der Funktionsgraph (ii) und das Niveaulinienportrait (α).

Die Funktion ist gerade in x, ungerade in y und ihr Graph beschreibt für festgehaltene y eine Parabel. Die Niveaumenge zum Niveau 0 ist durch die Gleichung $(3x^2 - y^2)y = 0$ gegeben, besteht also aus den drei Geraden $y = 0$ und $y = \pm\sqrt{3}x$. Daher kommen nur (ii) und (α) in Frage.

Siehe nächstes Blatt!

b) Der Funktionsgraph (iv) und das Niveaulinienportrait (β).

Die Funktion ist ungerade in x, gerade in y und sowohl in x als auch in y periodisch. Daher kommen nur (iv) und (β) in Frage.

c) Der Funktionsgraph (iii) und das Niveaulinienportrait (δ).

Die Funktion hängt nur vom Abstand $\sqrt{x^2+y^2}$ zum Ursprung ab. Ihr Graph ist also symmetrisch zur z-Achse und ihr Niveaulinienportrait symmetrisch zum Ursprung. Daher kommen nur (iii) und (δ) in Frage.

d) Der Funktionsgraph (i) und das Niveaulinienportrait (γ).

Die Funktion ist ungerade in x, gerade in y und ihr Graph beschreibt für festgehaltene x eine Kettenlinie. Daher kommen nur (i) und (γ) in Frage.

3. **a)** Es gelten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= yx^{y-1}, \qquad & f_{xy}(x,y) &= x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x \qquad \text{sowie} \\ f_y(x,y) &= x^y \ln x, \qquad & f_{yx}(x,y) &= yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

b) Es gelten

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{1-xy}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{(1+x^2)} \end{aligned}$$

und entsprechend $g_y(x,y) = \dfrac{1}{1+y^2}$. Da diese Funktionen nur von x bzw. y abhängen, verschwinden alle gemischten partiellen Ableitungen.

4. **a)** Es gilt

$$\begin{aligned} h(t) = f(\gamma(t)) &= \frac{e^{-2t}\sin^2 t - e^{-2t}\cos^2 t}{4} + \frac{e^{-2t}\cos t \sin t}{2} \\ &= \frac{e^{-2t}}{4}\left(2\sin t\cos t - \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)\right) = \frac{e^{-2t}}{4}\left(\sin(2t) - \cos(2t)\right) \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{e^{-2t}}{4}\left(2\cos(2t) + 2\sin(2t)\right) - \frac{2e^{-2t}}{4}\left(\sin(2t) - \cos(2t)\right) \\ &= \frac{e^{-2t}}{2}\left(\cos(2t) + \sin(2t) - \sin(2t) + \cos(2t)\right) = e^{-2t}\cos(2t)\,. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Wir schreiben $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, also

$$x(t) = e^{-t}\cos t \qquad \text{und} \qquad y(t) = e^{-t}\sin t.$$

Dann gelten

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -\left(x(t) + y(t)\right),\\ \dot{y}(t) &= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = x(t) - y(t)\end{aligned}$$

sowie

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -\frac{x - y}{2}, \qquad f_y(x, y) = \frac{y}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x + y}{2}.$$

Nach der Kettenregel ist somit

$$\begin{aligned}h'(t) &= f_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\dot{y}(t)\\ &= \frac{\left(x(t) - y(t)\right)\left(x(t) + y(t)\right)}{2} + \frac{\left(x(t) + y(t)\right)\left(x(t) - y(t)\right)}{2}\\ &= \frac{x(t)^2 - y(t)^2}{2} + \frac{x(t)^2 - y(t)^2}{2} = x(t)^2 - y(t)^2\\ &= e^{-2t}\cos^2 t - e^{-2t}\sin^2 t = e^{-2t}\cos\left(2t\right).\end{aligned}$$