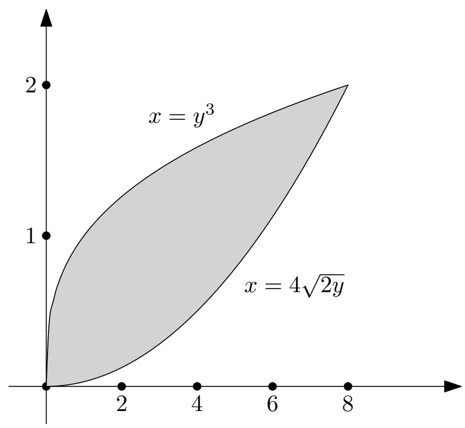
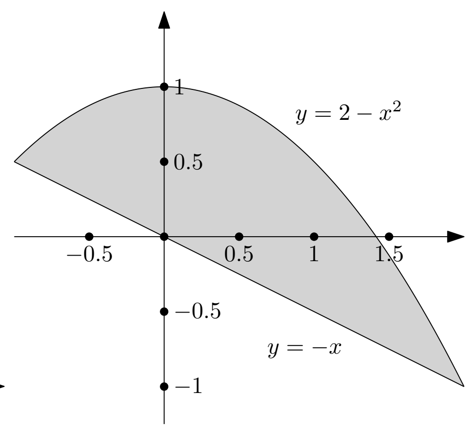
Musterlösungen zu Serie 4

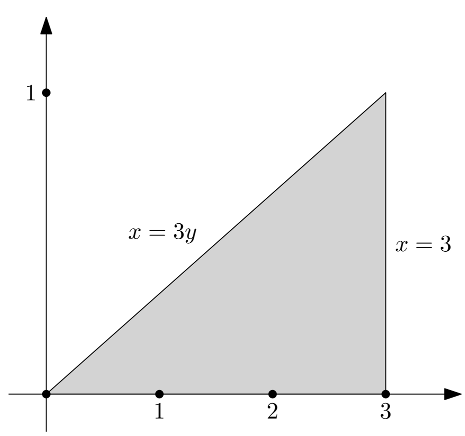
1. **a)** Die Integrationsgebiete sehen wie folgt aus:



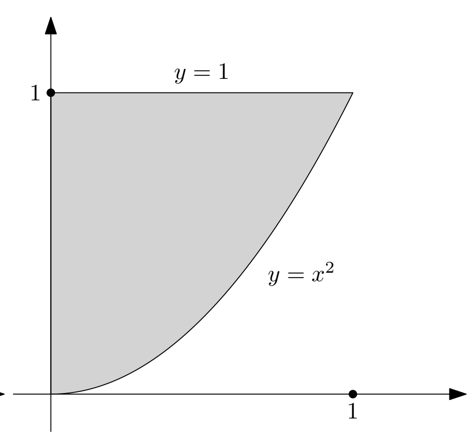
Das Integrationsgebiet in **i)**



Das Integrationsgebiet in **ii)**



Das Integrationsgebiet in **iii)**



Das Integrationsgebiet in **iv)**

b) **i)** Es gilt (vgl. die Skizze in **a)**)

$$\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 2,\ y^3 \le x \le 4\sqrt{2y}\,\}$$
$$= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 8,\ x^2/32 \le y \le \sqrt[3]{x}\,\},$$

und damit $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,dy\,dx.$

Bitte wenden!

ii) Es gilt (vgl. die Skizze in **a)**)

$$\begin{aligned}&\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 2,\ -x\le y\le 2-x^2\,\}\\&\quad=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le y\le 1,\ -y\le x\le \sqrt{2-y}\,\}\\&\qquad\cup\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le y\le 2,\ -\sqrt{2-y}\le x\le \sqrt{2-y}\,\}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} g(x,y)\,dy\,dx &= \int_{-2}^{1}\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} g(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} g(x,y)\,dx\,dy\\&= \int_{-2}^{2}\int_{\max\{-y,-\sqrt{2-y}\}}^{\sqrt{2-y}} g(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

iii) Es gilt (vgl. die Skizze in **a)**)

$$\begin{aligned}&\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1,\ 3y\le x\le y\,\}\\&\quad=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 3,\ 0\le y\le x/3\,\},\end{aligned}$$

und damit $\displaystyle\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^3\int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx.$

iv) Es gilt (vgl. die Skizze in **a)**)

$$\begin{aligned}&\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\,\}\\&\quad=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le \sqrt{y}\,\},\end{aligned}$$

und damit $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin y^3\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} x^3\sin y^3\,dx\,dy.$

c) i) Wir integrieren zuerst über y. Nach **b)** gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy &= \int_0^3\int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{x}{3}e^{x^2}\,dx\\&= \frac{1}{6}\int_0^3 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{6}\,e^{x^2}\Big|_0^3 = \frac{1}{6}\left(e^9-1\right).\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Integrand $x\mapsto e^{x^2}$ besitzt keine Stammfunktion, die sich mithilfe von elemetaren Funktionen darsellen lässt. Wollten wir zunächst nach x integrieren, so müssten wir das resultierende Integral durch die Gausssche Fehlerfunktion (vgl. Serie 6 vom HS 12) darstellen. Die nachträgliche Integration nach y gestaltete sich dann entsprechend umständlich.

Siehe nächstes Blatt!

ii) Wir integrieren zuerst über x. Nach **b)** gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin y^3 \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin y^3 \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{y}} \sin y^3 \, dy = \frac{1}{12} \int_0^1 3y^2 \sin y^3 \, dy \\
&= \frac{1}{12} \left(-\cos y^3\right)\big|_0^1 = \frac{1}{12}(1-\cos 1)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Auch hier ist die ursprüngliche Integrationsreihenfolge unangezeigt, da der Integrand $y \mapsto \sin y^3$ keine Stammfunktion besitzt, die sich mithilfe von elemetaren Funktionen darsellen lässt.

2. a) Es ist

$$\begin{aligned}
A &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4 \,\} \\
&= \{\, (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \,\}.
\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
&\iint_A (1 - 2\,x - 3\,y)\, dx\, dy = \int_0^{2\,\pi} \int_0^2 (1 - 2\,r\cos\varphi - 3\,r\sin\varphi)\, r \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3\,r^2 - 4\,r^3\cos\varphi - 6\,r^3 \sin\varphi}{6}\Bigg|_{r=0}^2 d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{16}{3}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi - 8\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 4\,\pi.
\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}
B &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x,y \ge 0 \,\} \\
&= \{\, (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \,\}.
\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
\iint_B e^{x^2+y^2-1}\, dx\, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{r^2-1}\, r\, dr\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{r^2-1}\, r\, dr \\
&= \frac{\pi}{2}\, \frac{e^{r^2-1}}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-1/e}{2} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right).
\end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}
C &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ x,y \ge 0 \,\} \\
&= \{\, (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \,\}
\end{aligned}$$

analog zu **b)**.

Bitte wenden!

In Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\iint_C \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2}\int_1^3 \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^3}\,r\,dr\,d\varphi\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = -\cos^2\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} = 1.\end{aligned}$$

d) Es ist (wegen $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ und $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$)

$$\begin{aligned}D &= \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 9,\ x/\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3}\,x\,\}\\ &= \{\,(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le r\le 3,\ \pi/6\le\varphi\le\pi/3\,\}.\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,dx\,dy &= \iint_D \arctan\tan\varphi\,dx\,dy\\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_1^3 \varphi\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\varphi\,d\varphi\int_1^3 r\,dr\\ &= \frac{\varphi^2}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}\,\frac{r^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{\pi^2}{24}\,4 = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

3. **a)** In Zylinderkoordinaten sind die beiden Paraboloide durch

$$z = r^2 \qquad \text{und} \qquad z = 8 - r^2$$

gegeben. Wegen

$$r^2 = 8 - r^2 = z, \quad r\ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = 2,\ z = 4$$

schneiden sie sich in einem Kreis mit Radius 2 in der Ebene $z = 4$. Das von den beiden Paraboloiden begrenzte endliche Volumen ist demnach

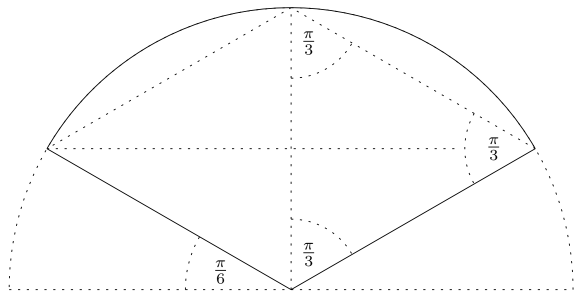
$$\begin{aligned}\int_{r^2}^{8-r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,dr\,d\varphi\,dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(8-2r^2\right) r\,dr\,d\varphi\\ &= 2\pi\left(4r^2 - \frac{2}{4}r^4\right)\Big|_0^2 = 2\pi\,(16-8) = 16\pi.\end{aligned}$$

Alternativ ergibt sich das Volumen (ebenfalls in Zylinderkoordinaten) aus

$$\begin{aligned}2\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} r\,dr\,d\varphi\,dz &= 4\pi\int_0^4\int_0^{\sqrt{z}} r\,dr\,dz\\ &= 4\pi\int_0^4 \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{z}}\,dz = 2\pi\int_0^4 z\,dz = 16\pi,\end{aligned}$$

da der begrenzte Körper symmetrisch zur Ebene $z = 4$ liegt.

Siehe nächstes Blatt!



Zu Aufgabe **3 b)**

b) In Zylinderkoordinaten sind die beiden Flächen durch

$$z = \frac{r}{\sqrt{3}} \qquad \text{und} \qquad z = \sqrt{1 - r^2}$$

gegeben. Wegen

$$\frac{r^2}{3} = 1 - r^2 = z^2, \quad r \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{3}}{2},\ z = \frac{1}{2}$$

schneiden sie sich in einem Kreis mit Radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$ in der Ebene $z = 1/2$. Das von den beiden Flächen begrenzte endliche Volumen ist demnach

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1 - r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) r \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(r\sqrt{1 - r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{3}} \right) dr$$

$$= 2\pi \left(-\frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{r^3}{3^{\frac{3}{2}}} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\pi \left(\frac{7}{24} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Da es sich bei dem Körper um einen Kugelausschnitt handelt, ist es allerdings natürlicher, das Volumen mittels **Kugelkoordinaten** zu berechnen (s. Figur):

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= 2\pi \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^1 (-\cos\vartheta)|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

4. **a)** Aufgrund der vorliegenden Symmetrie lässt sich die Masse offensichtlich am einfachsten in Kugelkoordinaten berechnen. Nach Voraussetzung gilt für die Dichte $\varrho(r) = \alpha r^3$ und $\varrho(1) = \alpha = \frac{1}{4}$, also ist die Masse der Kugel gegeben durch

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r^3}{4} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r^5 \, dr \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \frac{\pi}{2} \left. \frac{r^6}{6} \right|_0^2 (-\cos\vartheta)|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \frac{128}{6} = \frac{32\pi}{3}.$$

Bitte wenden!

b) In Zylinderkoordinaten sind die beiden Flächen durch

$$z = \frac{r^2}{2} \qquad \text{und} \qquad z = \sqrt{3 - r^2}$$

gegeben. Wegen

$$\frac{r^4}{4} = 3 - r^2, \quad r \geq 0, \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{2}$$

schneiden sie sich in einem Kreis mit Radius $r = \sqrt{2}$ in der Ebene $z = 1$.

Das Volumen des begrenzten Körpers ist

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3 - r^2} - \frac{r^2}{2} \right) r \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(r\sqrt{3 - r^2} - \frac{r^3}{2} \right) dr \\ &= 2\pi \left(-\frac{(3 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{r^4}{8} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \pi \left(2\sqrt{3} - \frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt (ξ, η, ζ) offensichtlich auf der z-Achse, d.h. $\xi = \eta = 0$. Es genügt daher, die z-Komponenten zu berechnen:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{V} \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} z \, r \, dr \, d\varphi \, dz = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} \Bigg|_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} r \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{V} \int_0^{\sqrt{2}} \left(3 - r^2 - \frac{r^4}{4} \right) r \, dr = \frac{\pi}{V} \left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{V} \left(3 - 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{V} \frac{5}{3} = \frac{3}{6\sqrt{3} - 5} \frac{5}{3} = \frac{5}{83} \left(6\sqrt{3} + 5 \right). \end{aligned}$$