Musterlösungen zu Serie 8

1. Besitzt das Vektorfeld $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))^T$ auf $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ ein Potential, gilt also $F = \nabla\varphi$ für eine (hinreichend reguläre) Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\Big(\varphi_{xy}(x,y) - \varphi_{yx}(x,y) = \Big) \quad \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = 0, \qquad (\star)$$

und mit der Kettenregel folgt für jeden (hinreichend regulären) Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt &= \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t))\; dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Insbesondere hängt die von F längs γ verrichtete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab und verschwindet für geschlossene Wege ($\gamma(a) = \gamma(b)$).

a) Das Vektorfeld ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und erfüllt ($\star$), denn

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = 2\,x\,y.$$

Es gelten

$$\begin{aligned}\int F_1(x,y)\, dx &= \int x\,y^2\, dx = \frac{x^2\,y^2}{2} + C(y) \qquad \text{und} \\ \int F_2(x,y)\, dy &= \int \left(x^2\,y + 2\right)\, dy = \frac{x^2\,y^2}{2} + 2\,y + C(x),\end{aligned}$$

also ist z.B. $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2\,y^2 + 2\,y$ ein Potentialfeld. Die Arbeit beträgt

$$\varphi(-8,-8) - \varphi(-8,8) = -16 - 16 = -32.$$

b) Das Vektorfeld ist für $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ definiert und erfüllt ($\star$), denn

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Es gelten

$$\int F_1(x,y)\,dx = \int x \ln y\,dx = \frac{x^2 \ln y}{2} + C(y) \qquad \text{und}$$
$$\int F_2(x,y)\,dy = \int \frac{x^2}{2y}\,dy = \frac{x^2 \ln y}{2} + C(x),$$

also ist z.B. $\varphi(x,y) = \frac{x^2 \ln y}{2}$ ein Potentialfeld. Entlang eines geschlossenen Integrationsweges wird somit keine Arbeit verrichtet.

c) Das Vektorfeld ist auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ definiert und erfüllt ($\star$), denn

$$\frac{\partial}{\partial y}\,F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\,F_2(x,y) = -\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Es gelten

$$\int F_1(x,y)\,dx = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2+y^2\right) + C(y) \qquad \text{und}$$
$$\int F_2(x,y)\,dy = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2+y^2\right) + C(x),$$

also ist z.B. $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\,\ln(x^2+y^2)$ ein Potentialfeld. Die Arbeit beträgt

$$\varphi(5,12) - \varphi(3,4) = \frac{1}{2}\,\ln\frac{169}{25} = \ln\frac{13}{5}.$$

d) Das Vektorfeld ist auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ definiert und erfüllt ($\star$), denn

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,F_1(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial\,F_2(x,y)}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2\,y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2\,x^2}{(x^2+y^2)^2}\\ &= -\frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2+2}{x^2+y^2} = 0.\end{aligned}$$

F besitzt aber kein Potential (vgl. die Bemerkung unten): Parametrisieren wir den Kreis mit Radius $r > 0$ durch $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$, so ist

$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{r\sin t}{r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t} \\ \frac{r\cos t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\sin t \\ \frac{1}{r}\cos t\end{pmatrix}, \qquad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t\end{pmatrix},$$

und also

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

Insbesondere ist F kein Potentialfeld, sonst würde dieses Integral verschwinden.

Siehe nächstes Blatt!

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass die Bedingung ($\star$) zwar notwendig, im allgemeinen aber nicht hinreichend für die Existenz eines Potentials ist. ($\star$) ist nur dann auch hinreichend, wenn der Definitionsbereich des Vektorfeldes *einfach zusammenhängt* (*Lemma von Poincaré*). Diese Voraussetzung ist z.B. für die Vektorfelder in den Teilaufgaben **a)** und **b)** erfüllt.

2. Wir bemerken zunächst, dass die Vektorfelder in **a)** und **b)** auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert sind, das Vektorfeld in **c)** für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Insbesondere sind die jeweiligen Definitionsbereiche einfach zusammenhängend, so dass die Vektorfelder F genau dann ein Potential besitzen, wenn ihre Rotation verschwindet.

a) Es gilt $\operatorname{rot} F = (2,2,2)^T \neq \vec{0}$, also ist F kein Gradientenfeld.

Es sei C der positiv orientierte Einheitskreis $\{\,(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\,\}$ in der x-y-Ebene. Eine Parametrisierung dieser Kurve ist z.B. durch

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit

$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und es gilt

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

b) Es gilt $\operatorname{rot} F = 0$. Ein Potential φ erlüllt

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= x + z && \Rightarrow && \varphi = \frac{x^2}{2} + xz + C(y,z), \\ \frac{d\varphi}{dy} &= y - z && \Rightarrow && \varphi = \frac{y^2}{2} - yz + C(x,z), \\ \frac{d\varphi}{dz} &= x - y && \Rightarrow && \varphi = xz - yz + C(x,y). \end{aligned}$$

Also ist z.B. $\varphi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + xz - yz$ ein Potential.

c) Es gilt $\operatorname{rot} F = 0$. Ein Potential ist z.B. $\varphi(x,y,z) = e^{xyz} + x + \ln y^2$.

Bitte wenden!

d) Es gilt

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0-0 \\ \frac{d}{dz}\frac{z}{x^2+z^2} + \frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+z^2} \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2+z^2} - \frac{2z^2}{x^2+z^2} + \frac{1}{x^2+z^2} - \frac{2x^2}{x^2+z^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Dennoch besitzt das Feld F kein Potential: ist C der positiv orientierte Einheitskreis $\{ (x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 = 1 \}$, den wir durch

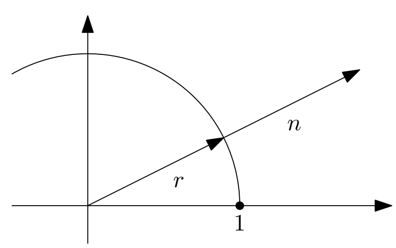
$$t \mapsto (\cos t, 0, \sin t)^T, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

parametrisieren, so gilt

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t \right) dt = -2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

3. Wir bemerken zunächst, dass die Grundflächen der beiden Körper zusammenfallen und von der Einheitskreisscheibe $\{ (x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \}$ in der x-y-Ebene gebildet werden. Der Fluss des Radiusvektors durch diese Fläche verschwindet, da er offensichtlich überall orthogonal zur Flächennormalen ist.

a) Der Radiusvektor verläuft auf der Hemisphäre offensichtlich überall parallel zur Flächennormalen. Der Fluss des Radiusvektors entspricht daher gerade dem Flächeninhalt der Hemisphäre.



Parametrisieren wir die Hemisphäre durch

$$f(\varphi, \vartheta) = (\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta)^T, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

mit

$$f_\varphi(\varphi, \vartheta) \times f_\vartheta(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \sin^2\vartheta \\ -\sin\varphi \sin^2\vartheta \\ -\sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

Siehe nächstes Blatt!

so ergibt sich für diesen Flächeninhalt

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} & |f_\varphi(\varphi,\vartheta) \times f_\vartheta(\varphi,\vartheta)| \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^4\vartheta + \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta} \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin\vartheta \sqrt{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta} \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, d\vartheta = -2\pi \, \cos\vartheta\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.
\end{aligned}
$$

b) Wir parametrisieren das Paraboloid durch

$$f(\varphi,s) = (s\cos\varphi, s\sin\varphi, 1-s^2)^T, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le s \le 1.$$

Mit

$$r(f(\varphi,s)) = f(\varphi,s) = \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \\ 1-s^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$f_\varphi(\varphi,s) \times f_s(\varphi,s) = \begin{pmatrix} 2s^2\cos\varphi \\ 2s^2\sin\varphi \\ s \end{pmatrix}$$

ergibt sich für den Fluss

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \\ 1-s^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2s^2\cos\varphi \\ 2s^2\sin\varphi \\ s \end{pmatrix} d\varphi \, ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(2s^3 + s - s^3\right) d\varphi \, ds \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(s^3 + s\right) ds \\
&= 2\pi \left(\frac{s^4}{4} + \frac{s^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

4. Wir parametrisieren die Fläche mithilfe verallgemeinerter Kugelkoordinaten:

$$r : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ 2\sin\varphi\cos\vartheta \\ 3\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

mit

$$r_\varphi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta \\ 2\cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_\vartheta(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -2\sin\varphi\sin\vartheta \\ 3\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

und also

$$r_\varphi(\varphi,\vartheta) \times r_\vartheta(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 6\cos\varphi\cos^2\vartheta \\ 3\sin\varphi\cos^2\vartheta \\ 2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Mit $F(r(\varphi,\vartheta)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ 18\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$ ergibt sich für den Fluss

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r(\varphi,\vartheta)) \cdot r_\varphi(\varphi,\vartheta) \times r_\vartheta(\varphi,\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta \\
&\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ 18\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\cos\varphi\cos^2\vartheta \\ 3\sin\varphi\cos^2\vartheta \\ 2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\, d\vartheta \\
&\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(6\cos^2\varphi\cos^3\vartheta + 3\sin^2\varphi\cos^3\vartheta + 36\sin^3\vartheta\cos\vartheta\right) d\varphi\, d\vartheta \\
&\quad = 6 \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\, d\vartheta + 3 \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\, d\vartheta + 36 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta \\
&\quad = \frac{9\pi}{4} \left(\sin\vartheta - \frac{\sin^3\vartheta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 18\pi\, \frac{\sin^4\vartheta}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4}\frac{2}{3} + 18\pi\,\frac{1}{4} = 6\pi,
\end{aligned}$$

wobei wir $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}$ benutzt haben.