# Musterlösungen zu Serie 9

**1.** Der Satz von Stokes besagt

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_Q rot\vec{F}\cdot d\vec{S}, \text{ wobei } Q \text{ der Quadrat ist.}$$

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x^2-y^2 & z^2-x^2 & y^2-z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (2y-2z, -(0-0), -2x+2y) = 2\cdot(y-z, 0, -x+y)$$

$$\vec{n} = (0,0,1)$$

$$\iint_Q rot\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_Q 2\cdot\begin{pmatrix} y-z \\ 0 \\ -x+y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS$$

$$= 2\iint_Q -x+y\,dS = 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -x+y\,dxdy = 0$$

**2.** **a)** Berechnung mittels des Satzes von Green:

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x^2y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^3$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\text{(Satz von Green)}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \int_0^1\int_0^{2x} (2xy^3 - x)\,dy\,dx =$$

**Bitte wenden!**

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\frac{xy^4}{2} - xy\right]_0^{2x} dx \\
&= \int_0^1 \left(8x^5 - 2x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{4}{3}x^6 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Direkte Berechnung:

Parametrisierung der Dreiecksseiten:

$$
\begin{aligned}
&r_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad r_1(t) = (t, 0) \\
&r_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad r_2(t) = (1, t) \\
&r_3 : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad r_3(t) = (1 - \tfrac{t}{2}, 2 - t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{F}(x,y) &= \begin{pmatrix} xy \\ x^2y^3 \end{pmatrix} \\
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}\left(r_1(t)\right) \cdot r_1'(t)\, dt + \int_0^2 \vec{F}\left(r_2(t)\right) \cdot r_2'(t)\, dt + \int_0^2 \vec{F}\left(r_3(t)\right) \cdot r_3'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^2 \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_0^2 \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{t}{2}\right)(2-t) \\ \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 (2-t)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} dt \\
&= 0 + \int_0^2 t^3\, dt + \int_0^2 -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)(2-t) - \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 (2-t)^3\, dt \\
&= \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 + \int_0^2 -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2-u}{2}\right)(2-(2-u)) - \left(1 - \frac{2-u}{2}\right)^2 (2-(2-u))^3 (-du) \\
&= 4 + \int_0^2 -\frac{1}{2}\,\frac{u}{2} \cdot u - \left(\frac{u}{2}\right)^2 u^3\, du \\
&= 4 + \left[-\frac{u^3}{12} - \frac{u^6}{24}\right]_0^2 = 4 - \frac{2}{3} - \frac{64}{24} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Also: mit Satz von Green gleiches Ergebnis (logisch !) bei weniger Rechenaufwand

**Siehe nächstes Blatt!**

**b)** Parametrisierung $\quad r:[0,4\pi]\to\mathbb{R}^2$

$$r(t)=\begin{cases}(t-\sin t, 1-\cos t)\,, \text{falls} & t\in[0,2\pi]\\ (4\pi-t,0)\,, \text{falls} & t\in[2\pi,4\pi]\end{cases}$$

Wir suchen die von $r(t)$ eingeschlossene Fläche $Z$.

Mit einem Vektorfeld $\vec{F}(x,y)=\binom{P}{Q}=\binom{-y}{0}$ mit $\operatorname{rot}\vec{F}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0-(-1)=1$ und dem Satz von Green erhalten wir :

$$\iint\limits_Z dA=\iint\limits_Z\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

und

$$\begin{aligned}\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}&=\int\limits_0^{2\pi}\vec{F}\,(r(t))\cdot\vec{r'}(t)\,dt+\int\limits_{2\pi}^{4\pi}\vec{F}\,(r(t))\cdot\vec{r'}(t)\,dt\\ &=\int\limits_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos t-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}-0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}dt\\ &=\int\limits_0^{2\pi}(-1+2\cos t-\cos^2 t)\,dt\\ &=-3\pi \quad \text{(negativ. weil Kurve negativ orientiert ist)}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eingeschlossene Fläche ist $3\pi$.

**3. a)**

$\Phi=\iint\limits_S rot\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, wobei $C$ die geschlossene Kurve welche $S$ berandet ist.

$$\begin{aligned}C&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+8z^2=1, z=0\right\}\\ &=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1, z=0\right\} \quad \ldots \quad \text{Kreis im } x-y \text{ Ebene}\end{aligned}$$

Die Oberfläche $\widetilde{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\le 1, z=0\}$ besitz diselbe Rand kurve $C$.
Wir benutzen die Parametriesirung von $\widetilde{S}$

$$\begin{array}{ll}0\le r\le 1 & x=r\cos\phi\\ 0\le\phi\le 2\pi & y=r\sin\phi\\ & z=0\end{array}$$

**Bitte wenden!**

$$|\vec{n}| = (0,0,1)$$

und der Satz von Stokes um $\Phi$ zu berechnen:

$$\Phi = \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{\widetilde{S}} rot\vec{F}\cdot d\widetilde{\vec{S}} = \iint\limits_{\widetilde{S}} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -2z \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\Phi = \iint\limits_{\widetilde{S}} \begin{pmatrix} 2r\cos\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\widetilde{S} = 0$$

**b)** Parametriesirung von $C$

$$r : [0,2\pi] \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3, \quad r(t) = (cost, sint, 0)$$
$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) = (-y, x, 0)$$

$$\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}\,(r(t))\cdot \vec{r'}(t)\,dt$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t\cdot\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

**4.**

$$\iint\limits_S rot\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}, \text{ wobei}$$
$$C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\, x = 3, y^2+z^2 = 16\}$$

Kreis im $\{x = 3, y - z\}$ Ebene mit Radius $r = 4$ ist. Die Parametrisierung von $C$ ergibt

$$r : [0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,\, r(t) = (3, 4\cos t, 4\sin t)$$
$$r'(t) = (0, -4\sin t, 4\cos t)$$

**Siehe nächstes Blatt!**

$$\int_C \vec{F}\cdot dt = \int_0^{2\pi} \vec{F}(r(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 8\cos t \\ -4\sin t \\ 3-4\cos t-4\sin t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -4\sin t \\ 4\cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 16\sin^2 t + 12\cos t - 16\cos^2 t - 16\cos t\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} 12\cos t\,dt = 0$$

**5.** Im Folgenden sei $H$ die Halbkugel, $S$ die gegebene halbe Sphäre und $E$ die Äquatorebene.
Beachte zunächst, dass

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 1,$$

und somit

$$\int_H \mathrm{div}\vec{v}\;dxdydz = \mathrm{Vol}(H) = \frac{2}{3}\pi.$$

Da auf Grund des Satzes von Gauss

$$\int_H \mathrm{div}\vec{v}\;dxdydz = \Phi_{\partial h} = \Phi_S + \Phi_E$$

gilt, müssen wir nur noch den Fluss $\Phi_E$ durch die Äquatorebene berechnen: Dazu parametrisieren wir $E$ durch

$$E : (r,\varphi) \in [0,1]\times[0,2\pi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit bekommen wir für $\Phi_E$ (man beachte, dass der Normalenvektor durch $-E_r \times E_\varphi$ gegeben ist):

$$\begin{aligned}\Phi_E &= -\int_0^1\int_0^{2\pi} < E_r\times E_\varphi, \vec{v} > \; d\varphi\;dr \\ &= -\int_0^1\int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \; d\varphi\;dr = -\pi.\end{aligned}$$

Schlussendlich erhalten wir für den gesuchten Fluss $\Phi_S$

$$\Phi_S = \Phi_{\partial H} - \Phi_E = \int_H \mathrm{div}\vec{v}\;dxdydz - \Phi_E = \frac{5}{3}\pi.$$

**Bitte wenden!**

**6.** Mit dem Satz von Gauss haben wir

$$\int_{\partial K} F \cdot n d\sigma = \int_K \nabla \cdot F dx dy dz.$$

Jetzt

$$\nabla \cdot F = xz \sin y - xz \sin y + e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}.$$

Dann

$$\int_K e^{x^2+y^2} dx dy dz = 3 \int_D e^{x^2+y^2} dx dy,$$

wobei

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Mit Polarkoordinaten finden wir sofort

$$\int_D e^{x^2+y^2} dx dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r e^{r^2} dr = \pi [e^{r^2}]_0^{\sqrt{2}} = \pi (e^2 - 1).$$

Dann

$$\int_K \nabla \cdot F dx dy dz = 3\pi (e^2 - 1).$$