D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 13
Dr. Ana Cannas da Silva

MC-Zwischentest

Einsendeschluss: 11.4.2013 17:00 Uhr

Frage 1

Welche der folgenden Funktionen ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert?

○ $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x+y}$

√ ○ $g(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2}$

○ $\varphi(x,y) = \sqrt{x+\ln y^2}$

○ $\psi(x,y) = \tan(x+y)$

Die Funktion f ist nur für $x \neq -y$, die Funktion φ nur für $y \neq 0$ und $x \geq \ln y^{-2}$ und die Funktion ψ nur für $x+y \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ erklärt.

Frage 2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

Welche der folgenden Aussagen über die Niveaulinien vor f ist korrekt?

○ Eine Niveaulinie kann sich nie selbst schneiden.

√ ○ Jeder Punkt liegt auf genau einer Niveaulinie.

○ Jede Niveaulinie geht durch genau einen Punkt.

○ Keine der obigen Aussagen.

Die Niveaulinie der Funktion f zum Niveau c ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(x,y) = c$. Ein beliebiger Punkt (x_0, y_0), der diese Gleichung erfüllt, liegt daher auf der Niveaulinie zum Niveau $c = f(x_0,y_0)$ und auf keiner anderen. Also ist (b) richtig und (d) falsch. Auch (a) ist falsch; zum Beispiel haben die Kurven $xy = 0$ beziehungsweise $y^2 - x^2 - x^3 = 0$ jeweils einen Selbstschnittpunkt. Antwort (c) schliesslich ist schon deshalb falsch, weil die Niveaulinien im allgemeinen wirklich Linien sind und aus mehreren Punkten bestehen.

Frage 3

Die Niveauflächen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z,$$

sind

√ ○ Paraboloide.

○ Kegel.

○ Sphären

○ keine der obigen Flächen.

Die Niveaufläche von f zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist durch

$$c = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2z \qquad \text{bzw.} \qquad z = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{c}{2}$$

gegeben und ist also ein Paraboloid.

Frage 4

Sei $f(x, y) = (\cos(x))^y$. Dann gilt für die partiellen Ableitungen von f

○ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y \tan(x)(\cos(x))^y \sin(x)$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (-\sin(x))^y$.

√ ○ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y \tan(x)(\cos(x))^y$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \ln(\cos(x))(\cos(x))^y$.

Richtig. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{\ln(\cos(x))y}) = e^{\ln(\cos(x))y} \frac{\partial}{\partial x}(\ln(\cos(x))y \\ &= (\cos(x))^y \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} y = -y \tan(x)(\cos(x))^y\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\ln(\cos(x))y}\right) = e^{\ln(\cos(x))y} \frac{\partial}{\partial y}(\ln(\cos(x))y) \\ &= (\cos(x))^y \ln(\cos(x)).\end{aligned}$$

○ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y(\cos(x))^{y-1} \sin(x)$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \ln(\cos(x))(\cos(x))^y$.

○ Keine der obigen Gleichungen.

Frage 5

Die Tangentialebene an die Fläche $z = (x^2 + y^2)e^{-y}$ im Punkt $(1, 0, 1)$

- ◯ ist durch die Gleichung $x = 2y - z - 1$ gegeben.
- ◯ ist durch die Gleichung $y = 2z - x - 1$ gegeben.
- √ ◯ ist durch die Gleichung $z = 2x - y - 1$ gegeben.
- ◯ gibt es nicht, da der Punkt nicht auf der Fläche liegt.

Für $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$ gelten

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xe^{-y}, \\ f_y(x, y) &= 2ye^{-y} - (x^2 + y^2)e^{-y}, \end{aligned}$$

also insbesondere $f_x(1, 0) = 2$ und $f_y(1, 0) = -1$. Damit gilt

$$\begin{aligned} z &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= 1 + 2(x - 1) - y = 2x - y - 1 \end{aligned}$$

für die Tangentialebene im Punkt $(1, 0, f(x, y)) = (1, 0, 1)$.

Frage 6

Gegeben seien die folgenden Funktionen von zwei Variablen:

$$\varphi(x, y) = C, \quad \psi(x, y) = x^2 \qquad \text{und} \qquad \chi(x, y) = x^2 + y^2,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aufgaben besitzt eine Lösung?

- ◯ Finde $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f_x(x, y) = \varphi$ und $f_y(x, y) \equiv \psi$.
- √ ◯ Finde $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f_x(x, y) = \psi$ und $f_y(x, y) \equiv \varphi$.
- ◯ Finde $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f_x(x, y) = \varphi$ und $f_y(x, y) \equiv \chi$.
- ◯ Finde $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f_x(x, y) = \chi$ und $f_y(x, y) \equiv \varphi$.

Für solche Funktionen f müsste jedenfalls $f_{xy} = f_{yx}$ gelten. Es sind

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) = \varphi_y(x, y) = \psi_y(x, y) &= 0 \\ \psi_x(x, y) = \chi_x(x, y) &= 2\,x, \\ \chi_y(x, y) &= 2\,y, \end{aligned}$$

daher sind die erste, dritte und vierte Aufgabe unlösbar. Die zweite Aufgabe besitzt z.B. die Lösung $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + C\,y$.

Frage 7

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

- ◯ die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.
- ◯ die Produkte von zwei linearen Funktionen.
- ◯ die Produkte einer linearen Funktion $x \mapsto ax$ von x mit einer linearen Funktion $y \mapsto by$ von y.
- √ ◯ die Funktionen der Gestalt

$$(x, y) \mapsto a + bx + cy + dxy$$

mit Konstanten a, b, c, d.

Antworten (a) und (b) sind falsch, weil sie beide die Funktion $f(x, y) = x^2$ erlauben, für welche $f_{xx} = 2 \neq 0$ ist. Für die Funktionen in (c) und (d) hingegen rechnet man schnell nach, dass sie $f_{xx} = f_{yy} = 0$ erfüllen. Insbesondere ist $f(x, y) = 1 + xy$ nach (d) eine solche Funktion, welche sich aber nicht in der Form (c) schreiben lässt. Also bleibt nur (d) als richtige Antwort übrig.

Antwort (d) ist auch wirklich korrekt. Denn $\frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx} = 0$ impliziert $f_x(x, y) = u(y)$ für eine Funktion $u(y)$. Somit ist $\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x, y) - u(y)x\big) = f_x(x, y) - u(y) = 0$ und daher $f(x, y) - u(y)x = v(y)$ für eine weitere Funktion $v(y)$. Es gilt also $f(x, y) = u(y)x + v(y)$. Daraus folgt aber $f_{yy} = u''(y)x + v''(y)$, und dies verschwindet identisch genau dann, wenn $u''(y)$ und $v''(y)$ identisch verschwinden. Dann müssen aber $u(y)$ und $v(y)$ lineare Funktionen von y sein, wie in Antwort (d).

Frage 8

Die Lemniskate $x^2(1-x^2) = y^2$ lässt sich

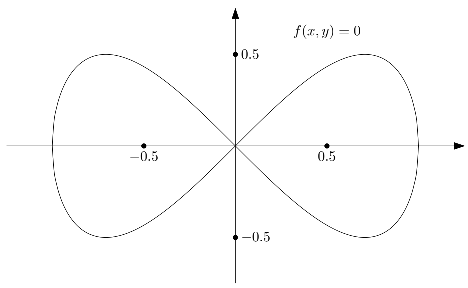
○ in der Nähe des Punktes $(0,0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.

○ in der Nähe des Punktes $(0,0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

○ in der Nähe des Punktes $(1,0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.

√ ○ in der Nähe des Punktes $(1,0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

Die Kurve ist durch $f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2 = 0$ gegeben



mit

$$f_x(x,y) = 2x(1-2x^2) \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -2y.$$

In jeder Umgebung des Ursprungs gibt es zu jedem x bzw. y offensichtlich stets zwei y- bzw. x-Werte, so dass $f(x,y) = 0$. Im Punkt $(1,0)$ gelten

$$f_x(1,0) = 2(1-2) = -2 \qquad \text{und} \qquad f_y(1,0) = 0,$$

daher lässt sich die Kurve um diesen Punkt zwar nicht als Graph einer Funktion von x aber als Graph einer Funktion von y darstellen.

Frage 9

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 + 6\,x\,y.$$

Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

○ Die Funktion f hat ihren einzigen kritischen Punkt im Ursprung

Es gilt

$$\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x + 6\,y \\ 2\,y + 6\,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

und da $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt.

○ Es gelten $f_{xx}(0,0) > 0$ und $f_{yy}(0,0) > 0$. Die Einschränkungen von f auf die x- und y-Achse nehmen im Ursprung also ein lokales Minimum an.

Es gilt $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 2 > 0$.

√ ○ Die Funktion f nimmt im Ursprung ein lokales Minimum an.

Auf den winkelhalbierenden Geraden $y = x$ bzw. $y = -x$ etwa gilt

$$f(x,y) = x^2 + x^2 + 6\,x^2 = 8\,x^2 > 0 \qquad \text{bzw.}$$
$$f(x,y) = x^2 + x^2 - 6\,x^2 = -4\,x^2 < 0,$$

für alle $x \neq 0$. Die Funktion f nimmt also in jeder (noch so kleinen) Umgebung des Ursprungs sowohl positive als auch negative Werte an.

○ Die Funktion f nimmt kein lokales Minimum an.

Da f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist, wäre jede Minimalstelle auch ein kritischer Punkt. Der einzige solche Punkt liegt aber im Ursprung und ist keine Minimalstelle von f.

Es ist $\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte sind bestimmt durch

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 36 = \lambda^2 - 4\lambda - 32 = (\lambda - 8)(\lambda + 4),$$

also $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 8$, der Ursprung ist also ein Sattelpunkt von f.

Frage 10

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{-x^2+y^3}, \quad \text{auf} \quad \mathbb{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

√ ◯ Die Funktion f hat ihren einzigen kritischen Punkt im Ursprung

Es gilt $\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,xe^{-x^2+y^3} \\ 3\,y^2 e^{-x^2+y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,x \\ 3\,y^2 \end{pmatrix} e^{-x^2+y^3}.$

◯ Die Funktion f nimmt im Ursprung ein lokales Extremum an.

Schon die Einschränkung $y \mapsto f(0,y) = e^{y^3}$ nimmt in 0 kein Extremum an.

◯ Die Funktion f besitzt im Ursprung einen Sattelpunkt.

Für $(x,y) \in \mathbb{D}$ gilt

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6\,y \end{pmatrix},$$

insbesondere

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind 0 und 2.

◯ Die Funktion f nimmt keine globalen Extrema an.

Im Innern von $\mathbb{D}$ nimmt f, wie oben gezeigt, keine Extrema an. Für festgehaltene $y = y_0$ nimmt aber $x \mapsto f(x,y_0) = e^{y_0^3} e^{-x^2}$ in 0 ein globales Maximum an und da

$$f(x,-1) \leq f(x,y) \leq f(x,1), \qquad (x,y) \in \mathbb{D},$$

ist $f(0,1) \geq f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{D}$, also $(0,1)$ eine globale Maximalstelle.

Frage 11

Wir betrachten die Funktion

$$f : \Delta \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 y(4 - x - y),$$

auf dem durch die Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $x + y = 6$ begrenzten Dreieck Δ. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- ◯ Die Funktion f nimmt ihren kleinsten Wert auf dem Rand von Δ an.
- √ ◯ Die Funktion f nimmt ihren grössten Wert auf dem Rand von Δ an.
- ◯ Die Funktion f ist auf dem Definitionsbereich Δ überall $< \sqrt{17}$.
- ◯ Das Verhältnis von grösstem und kleinstem Funktionswert der Funktion f auf dem gesamten Definitionsbereich Δ ist $< -\frac{1}{17}$.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy(4-x-y) - x^2 y \\ x^2(4-x-y) - x^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy(8-3x-2y) \\ x^2(4-x-2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in den kritischen Punkten $(0, C)$, $C \in \mathbb{R}$, $(4, 0)$ und $(2, 1)$ mit den Funktionswerten

$$f(0, C) = f(4, 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(2, 1) = 4.$$

Allgemein ist offensichtlich $f(x, y) = 0$ für $x = 0$ oder $y = 0$, f verschwindet also auf zwei der drei Seiten des Dreiecks Δ. Auf der verbleibenden Seite von Δ gilt

$$0 \geq f(x, y) = x^2(6 - x)(4 - (x + y)) = 2x^2(x - 6) =: \varphi(x),$$

mit

$$\varphi'(x) = 6x^2 - 24x \qquad \text{und} \qquad \varphi''(x) = 12x - 24.$$

f nimmt also auf dieser Seite in $(4, 2)$ das Minimum $f(4, 2) = \varphi(4) = -64$ an.

Somit ist $4 = \sqrt{16} < \sqrt{17}$ der grösste, -64 der kleinste Wert und $\frac{4}{-64} = -\frac{1}{16} < -\frac{1}{17}$.

Frage 12

Welcher Punkt $P = (x, y)$ auf dem Hyperbelast $x^2 - y^2 = 12$, $x > 0$, hat vom Punkt $(0, 4)$ auf der y-Achse den kleinsten Abstand?

√ ◯ Der Punkt $P = (4, 2)$.

◯ Der Punkt $P = (2\sqrt{7}, 4)$.

◯ Der Punkt $P = (2\sqrt{3}, 0)$.

◯ Einen solchen Punkt gibt es nicht.

Der Abstand des Punktes $P = (x, y)$ vom Punkt $(0, 4)$ ist durch

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$$

gegeben. Da der Punkt zudem auf der Hyperbel liegt, gilt

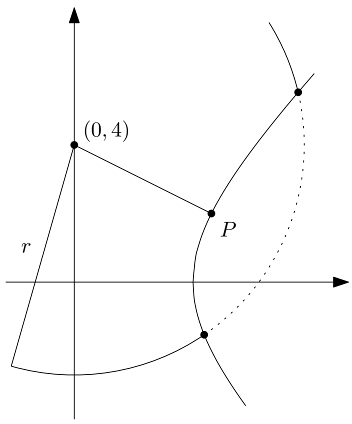
$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 12 = 0.$$

In einer relativen Minimalstelle von d gelten also

$$\begin{aligned} d_x^2(x, y) - \lambda\varphi_x &= 2x - 2\lambda x = 2x(1-\lambda) = 0, \\ d_y^2(x, y) - \lambda\varphi_x &= 2(y-4) + 2\lambda y = 2y(1+\lambda) - 8 = 0, \\ \varphi(x, y) &= x^2 - y^2 - 12 = 0. \end{aligned}$$

Aufgrund der letzten Gleichung gilt $x \neq 0$, so dass aus der ersten Gleichung $\lambda = 1$ und damit aus der zweiten $y = 2$ folgt. Wiederum aus der dritten Gleichung folgt damit schliesslich $x^2 = 12 + 4$, also, wegen $x > 0$, $x = 4$.

Es ist geometrisch leicht ersichtlich, dass es sich bei P tatsächlich um ein Minimum von d handeln muss: Punkte ausserhalb einer abgeschlossenen Kreisscheibe um $(0, 4)$ mit hinreichend grossem Radius r kommen nämlich nicht in Frage und der verbleibende Hyperbelabschnitt ist beschränkt und abgeschlossen. Der Abstand d nimmt dort also sowohl ein Maximum als auch ein Minimum an, wobei er ersteres offensichtlich in den Randpunkten annimmt.



Frage 13

Welches der folgenden Integrale ist *nicht* gleich den anderen?

○ $\int_0^1 \int_0^x x\, dy\, dx$

√ ○ $\int_0^1 \int_0^y x\, dx\, dy$

○ $\int_0^1 \int_0^y y\, dx\, dy$

○ $\int_0^1 \int_y^1 x\, dx\, dy$

In (a) und (d) ist der Integrationsbereich durch dieselbe Bedingung $0 \leq y \leq x \leq 1$ gegeben. Da auch der Integrand gleich ist, stimmen diese beiden Integrale überein. Dasselbe gilt für das Integral (c), welches aus (a) durch Vertauschung der Variablen x und y entsteht. Als einzig mögliche korrekte Antwort verbleibt daher (b).

Wegen

$$\int_0^1 \int_0^y x\, dx\, dy = \int_0^1 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\, dy = \left. \frac{y^3}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

und

$$\int_0^1 \int_0^y y\, dx\, dy = \int_0^1 y \ \left. x \right|_0^y \, dy = \int_0^1 y^2\, dy = \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ist (b) tatsächlich von den anderen verschieden.

Frage 14

Das Integral der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ über die Menge

$$B = \big\{(x,y)\,|\,x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\big\}$$

ist

- ○ $\displaystyle\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{2\pi}{3}.$
- √ ○ $\displaystyle\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{4\pi}{3}.$
- ○ $\displaystyle\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{16\pi}{3}.$
- ○ $\displaystyle\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{32\pi}{3}.$

Die Funktion f ist ≥ 0 auf B, und die Menge der Punkte zwischen ihrem Graphen und der xy-Ebene ist ein Viertel der Halbkugel H mit Zentrum O und Radius 2. Das Integral berechnet daher das Volumen eines Achtels der Vollkugel mit Radius r; dieses beträgt $\frac{4}{3}\pi r^3$; also gilt $\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{4}{3}\pi$.

Frage 15

Gegeben ist das Integral $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, wo D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ bezeichnet. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integrationen lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- √ ○ $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$
- ○ $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$
- ○ $\displaystyle I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\varphi} r^2\,dr\,d\varphi$
- ○ $\displaystyle I = \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

Der Integrationsbereich des ersten Integrals ist das Einheitsquadrat im ersten Quadranten mit Ecke im Ursprung. Im zweiten und vierten Integral wird über D in kartesischen, im dritten in Polarkoordinaten integriert.

Frage 16

Ein ebener Ring ist von zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien R bzw. $r < R$ begrenzt. Die Massendichte des Rings nimmt umgekehrt proportional dem Abstand vom Mittelpunkt der Kreise ab und ist auf dem Innenrand gleich Eins. Welche Masse hat der Ring?

- ○ $2\,\pi\,(R - r)$
- ○ $2\,\pi\,(R^2 - r^2)$
- √ ○ $2\,\pi\,r\,(R - r)$
- ○ $2\,\pi\,R\,(R - r)$

Da die Massendichte ρ des Rings umgekehrt proportional dem Abstand s vom Mittelpunkt der Kreise abnimmt und $\rho(r) = 1$ gilt, ist $\rho(s) = r/s$ und also

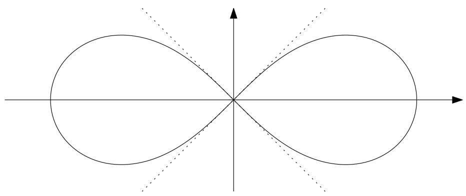
$$\iint_{\text{Ring}} \rho\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_r^R \rho\,s\,ds\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_r^R r\,ds\,d\varphi = 2\,\pi\,r\,(R - r).$$

Frage 17

Es sei $a > 0$. Die *Lemniskate von Bernoulli* $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ begrenzt

- ◯ genau eine Fläche mit Inhalt $a^2/4$.
- √ ◯ genau zwei Flächen mit Inhalt $a^2/2$.
- ◯ genau vier Flächen mit Inhalt a^2.
- ◯ keine Fläche endlichen Inhalts.

Die Kurve enhält offenbar den Ursprung und ist symmetrisch zur y-Achse. Es genügt daher, sie z.B. in der rechten Halbebene zu betrachten. Wegen $x^2 - y^2 \geq 0$ liegt die Kurve dort zwischen den beiden Winkelhalbierenden $y = \pm x$.



In Polarkoordinaten gilt

$$r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \quad \text{also} \quad r = a\sqrt{\cos(2\varphi)} \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

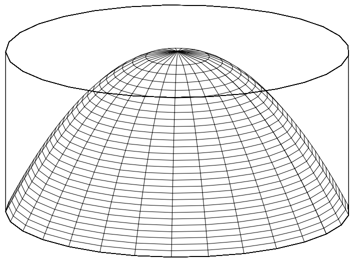
Der in der rechten Halbebene begrenzte Flächeninhalt ist also

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} r \, dr \, d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{r^2}{2} \bigg|_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\varphi) \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \, \frac{\sin(2\varphi)}{2} \bigg|_{\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2} \, \frac{1 - (-1)}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Die in der linken Halbebene begrenzte Fläche hat den gleichen Inhalt.

Frage 18



Es sei V_Z das Volumen eines gegebenen Kreiszylinders, V_P das Volumen desjenigen Rotationsparaboloids, das mit diesem Zylinder Grundfläche und Höhe gemeinsam hat. Dann gilt

- ◯ $V_P = \frac{1}{3}\, V_Z$.
- √ ◯ $V_P = \frac{1}{2}\, V_Z$.
- ◯ $V_P = \frac{2}{3}\, V_Z$.
- ◯ keine der obigen Aussagen.

Die Gleichung der rotierten Parabel sei $z = ax^2$, $a > 0$, der Zylinder habe den Grundkreisradius $r = \sqrt{\frac{h}{a}}$ und die Höhe h. Dann ist $V_Z = \pi r^2 h = \frac{\pi h^2}{a}$ und

$$V_P = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z/a}} r\, dr\, d\varphi\, dz = 2\pi \int_0^h \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{\sqrt{z/a}} dz$$
$$= \frac{\pi}{a} \int_0^h z\, dz = \frac{\pi}{a} \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^h = \frac{1}{2} \frac{\pi h^2}{a} = \frac{1}{2}\, V_Z.$$

Das Resultat geht auf Archimedes zurück.

Frage 19

Der Schwerpunkt $S = (x, y)$ der zwischen der Parabel $y = -x^2 - 2x$ und der x-Achse gelegenen homogenen Fläche (endlichen Inhalts) ist

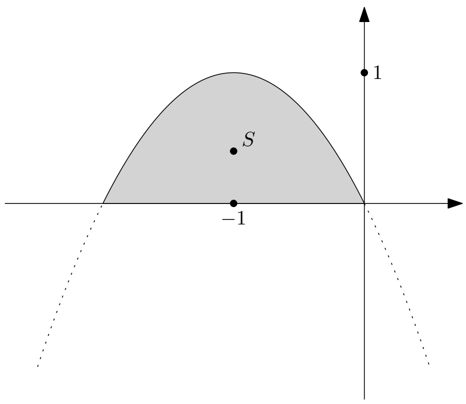
○ $S = \left(\frac{2}{5}, -1\right)$.

√ ○ $S = \left(-1, \frac{2}{5}\right)$.

○ $S = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

○ Der Ursprung.

Der Schwerpunkt $S = (x, y)$ liegt offensichtlich auf der Symmetrieachse der Parabel,



es gilt also $x = -1$. Der Inhalt der begrenzten Fläche ist

$$A = \int_{-2}^{0} \int_{0}^{-x^2-2x} dy\, dx = \int_{-2}^{0} \left(-x^2 - 2x\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

und die Ordinate des Schwerpunktes somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \int_{-2}^{0} \int_{0}^{-x^2-2x} y\, dy\, dx &= \frac{3}{4} \int_{-2}^{0} \frac{y^2}{2}\Big|_{0}^{-x^2-2x} dx = \frac{3}{8} \int_{-2}^{0} \left(-x^2 - 2x\right)^2 dx \\ &= \frac{3}{8} \int_{-2}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 4x^2\right) dx = \frac{3}{8} \left(\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0} \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) = \frac{3}{8} \frac{16}{15} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Frage 20

Der Kugeloktant

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x, y, z \geq 0\}, \qquad R > 0,$$

sei mit der Masse der konstanten Dichte 1 belegt.

Der Schwerpunkt $S = (x, y, z)$ von K ist

○ $S = \left(\frac{1}{8}\,R, \frac{1}{8}\,R, \frac{1}{8}\,R\right)$.

√ ○ $S = \left(\frac{3}{8}\,R, \frac{3}{8}\,R, \frac{3}{8}\,R\right)$.

○ $S = \left(\frac{5}{8}\,R, \frac{5}{8}\,R, \frac{5}{8}\,R\right)$.

○ Der Ursprung.

Die Masse bzw. das Volumen von K ist $V = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{6}$.

Für seine Schwerpunktkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\iiint_K x\,dx\,dy\,dz &= \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\sin\vartheta\cos\varphi\, r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R r^3\,dr\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^2\vartheta\,d\vartheta, \\
\frac{1}{V}\iiint_K y\,dx\,dy\,dz &= \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\sin\vartheta\sin\varphi\, r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R r^3\,dr\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^2\vartheta\,d\vartheta, \\
\frac{1}{V}\iiint_K z\,dx\,dy\,dz &= \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\cos\vartheta\, r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R r^3\,dr\int_0^{\pi/2}1\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta.
\end{aligned}$$

Dabei sind

$$\int_0^R r^3\,dr = \frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{R^4}{4},$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = \sin\varphi\big|_0^{\pi/2} = 1,$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{(vgl. Serie 6 vom HS 12)}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = -\frac{\cos^2\vartheta}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Alle Komponenten der Schwerpunktes sind also $\frac{1}{V}\frac{R^4}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{6}{\pi R^3}\frac{\pi R^4}{16} = \frac{3}{8}\,R$.