Dr. Ana Cannas da Silva

Serie 7

Neben den Aufgaben dieser Serie empfehlen wir Ihnen aus Papula Bd. 3 I

- zu Abschnitt 3 die Übungsaufgaben 2-4, 6 und 10,
- zu Abschnitt 4 die Übungsaufgaben 1, 2, 4-10 und
- zu Abschnitt 5 die Übungsaufgaben 1-4 sowie 6-16.

1. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x,y) = \ln\big((x^2-1)y+1\big) + 4x.$$

a) Skizzieren Sie den (maximalen) Definitionsbereich von f.

b) Geben Sie den Gradienten von f allgemein und im Punkt $P=(1,1)$ an.

c) Zu welchem Wert gehört die Niveaulinie von f durch den Punkt P? Finden Sie einen Tangentialvektor an diese Linie im Punkt P.

d) Deuten Sie den Graphen von f im $\mathbb{R}^3$ als Niveaufläche $\mathcal{F}$ einer geeigneten Funktion $h(x,y,z)$. Bestimmen Sie damit einen Normalenvektor der Tangentialebene an $\mathcal{F}$ im Punkt $(1,0,f(1,0))$ sowie die Koordinatengleichung dieser Ebene.

2. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(u,v,w) = \frac{u}{v}\sqrt{\sin(w)}.$$

a) Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich von f.

b) Geben Sie den Gradienten von f allgemein und im Punkt $P=(1,1,\pi/2)$ an.

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in P in Richtung $(2,2,1)^T$.

d) In welcher Richtung ist die Richtungsableitung von f im Punkt P maximal bzw. mininal und wie gross ist dieser Maximal- bzw. Minimalwert?

Bitte wenden!

3. Die Wirkung $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, wird in vielen Fällen durch

$$W(x,t) = x^2(a-x)\,t^2 e^{-bt}, \qquad 0 < x < a, \quad t, b > 0,$$

mit positiven Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt.

Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von a und b, die Dosis x und die Zeit t so, dass die Wirkung $W(x,t)$ maximal ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

4. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Vektorfelder[1]

$$D(x,y,z) = \frac{Q}{4\,\pi}\,\frac{(x,y,z)^T}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad \text{mit einer Konstanten } Q \neq 0,$$

$$H(x,y,z) = \frac{I}{2\,\pi}\,\frac{(-y,x,0)^T}{x^2+y^2} \qquad \text{mit einer Konstanten } I \neq 0,$$

sowohl wirbel- als auch quellfrei sind ($\operatorname{rot} D = \operatorname{rot} H = \vec{0}$, $\operatorname{div} D = \operatorname{div} H = 0$).

5. Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes F entlang des Weges γ, wobei

a) $F(x,y) = (x,y)^T$,
γ: die Strecke von $A = (1,0)$ nach $B = (0,2)$,

b) $F(x,y) = (2x-y, x+2y)^T$,
γ: der Einheitskreis um den Ursprung, positiv orientiert,

c) $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)^T$,
γ: die Ellipse $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, positiv orientiert.

d) Parametrisieren Sie in einer der obigen Aufgaben γ auf eine zweite Art und überzeugen Sie sich, dass dadurch das Linienintegral seinen Wert nicht ändert.

[1] D entspricht der dielektrischen Verschiebung einer Punktladung Q im Koordinatenursprung, H der magnetische Feldstärke eines Stromfadens I entlang der positiv orientierten z-Achse.