Serie 8

Neben den Aufgaben dieser Serie empfehlen wir Ihnen aus Papula Bd. 3 I

- zu Abschnitt 7 die Übungsaufgaben 1-5, 7-9 und 11-14 sowie
- zu Abschnitt 8 die Übungsaufgaben 1-8.

1. Berechnen Sie die Arbeit der folgenden Vektorfelder F entlang der Kurven C. Bestimmen Sie zudem jeweils den (maximalen) Definitionsbereich des Vektorfeldes F und entscheiden Sie, ob es sich bei F um ein Gradientenfeld handelt oder nicht.

a) $F(x,y) = \left(xy^2, x^2y+2\right)^T$,
C: der Viertelkreisbogen zentriert im Ursprung von $(-8,8)$ nach $(-8,-8)$.

b) $F(x,y) = \left(x\ln y, x^2/2y\right)^T$,
C: das Dreieck mit den Ecken $(1,1)$, $(3,1)$ und $(3,2)$, positiv orientiert.

c) $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)^T$,
C: der Abschnitt von $(3,4)$ bis $(5,12)$ auf der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

d) $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)^T$,
C: der Kreis um den Ursprung mit Radius $r > 0$, positiv orientiert.

2. Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Vektorfeldern F um Gradientenfelder handelt. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion oder geben Sie eine geschlossene Kurve C an, so dass $\oint_C F \cdot ds \neq 0$.

a) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix}$

b) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix}$

c) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz}+1 \\ xze^{xyz}+\frac{2}{y} \\ xye^{xyz} \end{pmatrix}$

d) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{x^2+z^2} \\ y \\ \frac{-x}{x^2+z^2} \end{pmatrix}$

Hinweis: vgl. Aufgabe **1 d)**.

Bitte wenden!

3. Vergleichen Sie die Flüsse des Radiusvektors

$$r(x, y, z) = (x, y, z)$$

von innen nach aussen durch die Oberfläche

a) der Halbkugel $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0 \}$,

b) des Paraboloidsegments $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z \leq 1,\ z \geq 0 \}$

4. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{2} \\ 2z^2 \end{pmatrix}$$

durch den Teil des Ellipsoids

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$$

im ersten Oktanten.

Bitte **beachten Sie**

- Die erste Vorlesung der **Systemanalyse** findet am Mittwoch, 24.4., statt.
- Die **Übungen zur Systemanalyse** finden ab Donnerstag, 25.4., in den Übungsgruppen der Mathematik jeweils **in der zweiten Stunde** im Anschluss an die Übungen zur Mathematik statt.
- Für die Serien 8 und 9 ist eine Bearbeitungszeit von **zwei Wochen** vorgesehen, d.h.

  Serie 8 soll bis spätestens **10.5.**,

  Serie 9 bis spätestens **24.5.**

  abgegeben werden.
- An **Auffahrt** (Donnerstag, **9.5.**) finden keine Lehrveranstaltungen statt. Falls Sie in einer Donnerstagsgruppe eingeschrieben sind, können Sie in dieser Woche erste Fragen zu Serie 9 in der Präsenz stellen oder eine der Dienstagsgruppen besuchen.