Serie 9

Neben den Aufgaben dieser Serie empfehlen wir Ihnen aus Papula Bd. 3 I

- zum Satz von Stokes aus Abschnitt 7 die Übungsaufgaben 6, 7 und 9,
- zum Satz von Gauss aus Abschnitt 7 die Übungsaufgaben 1-5

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Linienintegral $\oint_C F \cdot ds$, wobei

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ z^2 - x^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R},$$

und C die (von oben betrachtet) positiv orientierte Randkurve des Quadrates

$$Q = \{\, (x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1 \,\}$$

bezeichnet.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Green

a) das Linienintegral $\oint_D F \cdot ds$, wobei $F(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2y^3 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$, und D das positiv orientierte Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,2)$ ist.

b) den Inhalt der Fläche unter einem Bogen der Zykloide[1] $t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

Hinweis: Führen Sie ein geeignetes Vektorfeld ein.

3. Es sei $\Phi = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot dA$ der Fluss von innen nach aussen von $\operatorname{rot} F$, wobei

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R},$$

durch das halbe Ellipsoid $S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 8z^2 = 1,\ z \geq 0 \,\}$.

a) Berechnen Sie Φ, indem Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes zu einer Fläche $\tilde{S}$ übergehen, die für die Berechnung des Integrals günstiger ist.

b) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um Φ durch ein Linienintegral zu berechnen.

[1] vgl. Serie 6 Aufgabe **2 a)**.

4. Berechnen Sie den Fluss $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot dA$ des Vektorfeldes $\operatorname{rot} F$, wobei

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ -z \\ x-y-z \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R},$$

von innen nach aussen[2] durch die Fläche

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 25,\ 3 \le x \le 5 \,\}$$

mit Hilfe des Satzes von Stokes.

5. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\,(1-e^z) \\ 0 \\ e^z \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R},$$

von innen nach aussen durch die Hemisphäre

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0 \,\}$$

mit Hilfe des Satzes von Gauss.

6. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} z \sin y \\ xz\cos y \\ ze^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R},$$

durch die Oberfläche des geraden Kreiszylinderts mit Höhe 3 und Grundfläche

$$D = \{\, (x,y,0) \,|\, x^2+y^2 \le 2 \,\}.$$

Orientieren Sie die Oberfläche so, dass die Normale nach aussen zeigt.

Hinweis: Führen Sie geeignete Koordinaten ein.

[2] d.h. so, dass die Flächennormale vom Ursprung weg gerichtet ist.