D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 13
Dr. Ana Cannas da Silva

MC-Abschlusstest

Einsendeschluss: 14.6.2013 17:00 Uhr

Frage 1

Wie lautet der Gradient der Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$?

- ○ $\nabla f(x,y) = x + y$
- ○ $\nabla f(x,y) = y$
- ○ $\nabla f(x,y) = (x,y)^T$
- ○ $\nabla f(x,y) = (y,x)^T$

Frage 2

Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

- ○ des Gradienten.
- ○ orthogonal zum Gradienten.
- ○ entgegengesetzt zum Gradienten.
- ○ der minimalen partiellen Ableitung.

Frage 3

Die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = x^2 + y + z^3$$

an der Stelle $(1,2,2)$ in Richtung des Vektors $(4,4,2)^T$ ist

- ○ $\frac{34}{3}$
- ○ 36
- ○ 6
- ○ $(2,1,12)$

Frage 4

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = x^3y^2z$$

um den Punkt $(1, -1, 1)$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Man stellt

- ◯ in x-Richtung eine Zunahme der Funktionswerte fest.
- ◯ in y-Richtung eine Abnahme der Funktionswerte fest.
- ◯ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.
- ◯ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

Frage 5

Es sei eine Fläche $\mathcal{F}$ einerseits durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$, andererseits durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben. Man betrachte einen festen Punkt $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ auf der Fläche $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen ist dann stets richtig? Die Vektoren $\nabla f(P_0)$ und $\varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)$

- ◯ sind gleich.
- ◯ sind parallel.
- ◯ stehen senkrecht aufeinander.
- ◯ sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.

Frage 6

Die Fläche $\mathcal{F}$ sei durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ gegeben. Der Vektor $n(u, v)$ bezeichne einen Normaleneinheitsvektor zu $\mathcal{F}$, $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ sei ein Punkt auf der Fläche $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen ist i.A. **falsch**?

- ◯ $n(u_0, v_0) = \pm\varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)$
- ◯ Der Vektor $\varphi_u(u_0, v_0)$ liegt in einer Tangentialebene zu $\mathcal{F}$ im Punkt P_0.
- ◯ Die Tangentialebene zur Fläche $\mathcal{F}$ im Punkt P_0 wird aufgespannt durch die beiden Vektoren $\varphi_u(u_0, v_0)$ und $\varphi_v(u_0, v_0)$.
- ◯ Der Vektor $\varphi_u(u_0, v_0)$ ist tangential an die u-Linie, die durch P_0 geht.

Frage 7

Welche der folgenden Kurven ist die längste?

- ◯ Der Graph der Funktion $g_1\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 6x$.
- ◯ Der Graph der Funktion $g_2\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2$.
- ◯ Der Graph der Funktion $g_3\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3$.
- ◯ Der Graph der Funktion $g_4\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$.

Frage 8

Das skalare Linienintegral

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\ |\gamma'(t)|\ dt$$

über eine Kurve C parametrisiert durch $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$

- ◯ hängt wesentlich von der gewählten Parametrisierung γ der Kurve C ab.
- ◯ hängt von der Länge und der Orientierung des Intervalls $[a,b]$, darüber hinaus aber nicht von der gewählten Parametrisierung γ der Kurve C ab.
- ◯ hängt von der durch γ induzierten Orientierung der Kurve C, darüber hinaus aber nicht von der gewählten Parametrisierung der Kurve ab.
- ◯ ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung γ der Kurve C.

Frage 9

Die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\right\}$$

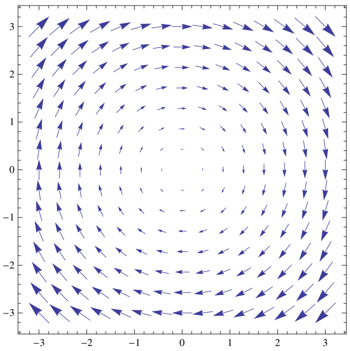
sei mit einer Masse der Dichte $\delta(x,y,z) = 2z$ belegt.

Die Gesamtmasse der Fläche beträgt

- ◯ 0.
- ◯ π.
- ◯ 2π.
- ◯ 4π.

Frage 10

Es sei $\vec{F}$ das in folgender Abbildung dargestellte Vektorfeld:



Ferner seien

- C_1 die gerade Verbindungsstrecke von $(-3, -3)$ nach $(-3, 3)$ und
- C_2 der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis vom Radius 2 um den Koordinatenursprung.

Dann gilt:

◯ Beide Integrale $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$, $\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ sind positiv.

◯ Beide Integrale $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$, $\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ sind negativ.

◯ Das Integral $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist positiv, das Integral $\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist negativ.

◯ Das Integral $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist negativ, das Integral $\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist positiv.

Frage 11

Die Arbeit A eines Vektorfeldes $\vec{F}$ längs des Geradenstücks von $(1, 0, 0)$ nach $(-1, -1, -1)$ sei 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit B von $\vec{F}$ längs des Geradenstücks von $(-1, -1, -1)$ nach $(1, 0, 0)$ berechnet?

◯ Die Arbeit B beträgt 0.

◯ Die Arbeit B beträgt -5.

◯ Die Arbeit B beträgt ebenfalls 5.

◯ Die Arbeit B lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

Frage 12

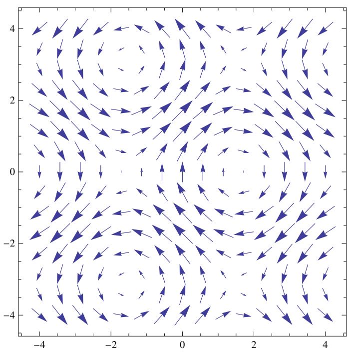
Es sei $\vec{F}(x,y) = (xy, y-x)^T$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Die von $\vec{F}$ verrichtete Arbeit vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,1)$

- ◯ entlang der Kurve $y = x$ ist $< \frac{1}{2}$.
- ◯ entlang der Kurve $y = x^2$ ist $< \frac{1}{10}$.
- ◯ entlang der Kurve $y^2 = x$ ist $> \frac{1}{2}$.
- ◯ entlang der Kurve $y = x^3$ ist $< -\frac{1}{10}$.

Frage 13

Es sei $\vec{F}$ das in folgender Abbildung dargestellte Vektorfeld:



Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist konservativ.
- ◯ Das Vektorfeld $\vec{F}$ besitzt ein Potential.
- ◯ Das Vektorfeld $\vec{F}$ besitzt zwar kein Potential, aber es gilt

$$\oint_C \vec{F}\, \vec{ds} = 0$$

  entlang jedes *geschlossenen* Wegs C.
- ◯ Keine der obigen Aussagen.

Frage 14

Welches der folgenden Vektorfelder $\vec{F}$ besitzt ein Potential?

- ◯ $\vec{F}(x,y) = (x-y,\, x-y)^T$
- ◯ $\vec{F}(x,y) = (x^2-y,\, x^3+2xy)^T$
- ◯ $\vec{F}(x,y) = (x^3+2xy,\, x^2-y)^T$
- ◯ $\vec{F}(x,y) = (x^3-xy^2,\, x^2y-y^5)^T$

Frage 15

Für welche Konstante a ist das Vektorfeld

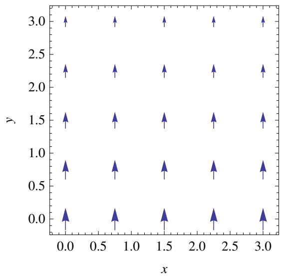
$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\ln\left(1+x^2\right) + ay^2, xy+y^2, z^3\right)^\top$$

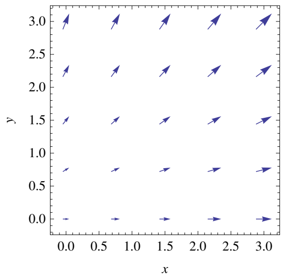
von der Form $\vec{F}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$ für eine gewisse Funktion φ?

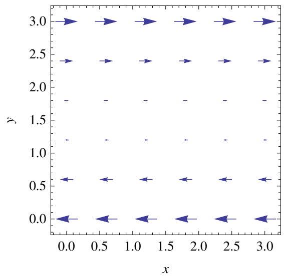
- ◯ $a = -1/2$.
- ◯ $a = 1/2$.
- ◯ $a = 1/2$ und $a = -1/2$.
- ◯ Es gibt keine solche Konstante a, da der Definitionsbereich des Vektorfeldes $\vec{F}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Frage 16

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils ein dreidimensionales Vektorfeld $\vec{F}$ in der x-y-Ebene. Die z-Komponente ist 0. Die Vektorfelder soll in allen dazu parallelen Ebenen identisch aussehen, d.h. $\vec{F}$ soll jeweils unabhängig von z und seine z-Komponente konstant gleich 0 sein.







Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Alle drei Felder sind wirbelfrei.
- ◯ Genau eines der Felder ist wirbelfrei.
- ◯ Alle drei Felder sind quellenfrei.
- ◯ Genau eines der Felder ist quellenfrei.

Frage 17

Es sei f eine skalare Funktion, $\vec{F}$ ein Vektorfeld.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- ◯ $\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$.
- ◯ $\operatorname{div} \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.
- ◯ $\operatorname{div} \left(f\vec{F}\right) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{F}$.
- ◯ $\operatorname{div} \operatorname{rot} \left(\nabla f \times \vec{F}\right) = 0$.

Frage 18

Es sei C die positiv orientierte Randkurve eines ebenen Gebiets G.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- ◯ Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.
- ◯ Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$.
- ◯ Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.
- ◯ Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - 4y + 2 \\ 2xy - 3x + 1 \end{pmatrix}$.

Frage 19

Die Arbeit, des Vektorfelds

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\right)^T$$

entlang des positiv orientierten Einheitskreises in der (y,z)-Ebene ist

- ◯ π.
- ◯ 3π.
- ◯ $-\pi$.
- ◯ -3π.

Frage 20

Sei $\mathcal{O}$ die Oberfläche eines beschränkten Körpers mit Volumens V. Die Fläche sei so orientiert, dass die Flächennormale nach aussen zeigt. Ferner seien

$$\begin{aligned} \vec{r}(x,y,z) &= (x,y,z)^T && \text{der Radiusvektor und} \\ \Phi &= \iint_{\mathcal{O}} \vec{r} \cdot d\vec{A} && \text{der Fluss des Radiusvektors durch } \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Wie gross ist der Fluss $\tilde{\Phi}$ des Radiusvektors $\vec{r}$ durch eine gleich orientierte Oberfläche $\tilde{\mathcal{O}}$ eines Körpers mit dem doppelten Volumen $2V$?

- ◯ Der Fluss ist doppelt so gross, d.h. $\tilde{\Phi} = 2\Phi$.
- ◯ Der Fluss ist das Quadrat desjenigen durch $\mathcal{O}$, d.h. $\tilde{\Phi} = \Phi^2$.
- ◯ Der Fluss ist die dritte Potenz desjenigen durch $\mathcal{O}$, d.h. $\tilde{\Phi} = \Phi^3$.
- ◯ Das lässt sich nicht sagen ohne $\mathcal{O}$ und $\tilde{\mathcal{O}}$ explizit zu kennen.