Musterlösung Serie 8

1. (a) Es gilt $df(x,y) = \begin{pmatrix} 8x+y & x+\frac{1}{(y-1)^2} \end{pmatrix}$. Eine offene Menge wie in der Aufgabenstellung, auf der $df(x,y)$ beschränkt bleibt, ist z.B. $B_{\frac{1}{4}}(0,\frac{1}{2}) \cup B_{\frac{1}{4}}(0,\frac{3}{2})$. Hier gilt

$$\|df(x,y)\|_1 = |8x+y| + |x+\frac{1}{(y-1)^2}| = 9x+y+\frac{1}{(y-1)^2}$$
$$\leqslant 9\frac{1}{4} + (\frac{3}{2}+\frac{1}{4}) + \frac{1}{(\frac{1}{4})^2}$$

was eine mögliche Lipschitz-Konstante ist.

(b) Da $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1$, folgt, dass $U = \mathbb{R}$ eine mögliche Wahl ist mit Lipschitz Konstanter 1.

(c) $\exp' = \exp$ wächst unbeschänkt auf $[x_0, +\infty[$, also gibt es kein solches x_0.

(d) Jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ funktioniert: $\exp'(x) = \exp(x) \leqslant \exp(x_0) =: L$ für $x \leqslant x_0$. L ist also eine Lipschitz Konstante.

2. (a) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist konvex, da $f''(x) = 2 > 0$. Seien nun $(x_1,\dots,x_n)$ und $(y_1,\dots,y_n)$ im Einheitsball. Sei $t \in [0,1]$. Es folgt:

$$\sum_{i=1}^n (tx_i+(1-t)y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n (tx_i^2+(1-t)y_i^2) = t\sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)\sum_{i=1}^n y_i^2 \leqslant t+(1-t) = 1,$$

da $t, 1-t \geqslant 0$.

(b) Für $v = \sum_{i=1}^m a_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^m b_i v_i$ folgt $tv+(1-t)w = \sum_{i=1}^m (ta_i + (1-t)b_i)v_i$.

(c) Wie in der vorigen Teilaufgabe. Nun aber gilt $a_i, b_i \geqslant 0$ und $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m b_i = 1$ und also $\sum_{i=1}^m (ta_i + (1-t)b_i) = t\sum_{i=1}^n a_i + (1-t)\sum_{i=1}^m b_i = t + (1-t) = 1$.

(d) Für $(v_1,v_2),(w_1,w_2) \in C_1 \times C_2$ und $t \in [0,1]$ folgt $t(v_1,v_2) + (1-t)(w_1,w_2) = (tv_1+(1-t)w_1, tv_2+(1-t)w_2) \in C_1 \times C_2$.

3. (a) Der Hauptsatz ergibt $\partial_x f(x,y) = h(x,y)$ was stetig ist. Wir behaupten, dass $\partial_y f(x,y) = \int_0^x \partial_y h(s,y)ds$, also, dass man unter dem Integral differenzieren darf. Mit dem Mittelwertsatz gilt für $y > y_0$

$$\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} = \int_0^x \frac{h(s,y)-h(s,y_0)}{y-y_0}ds = \int_0^x \partial_y h(s,y(s))ds$$

für Punkte $y(s) \in [y_0,y]$. Wir schätzen ab:

$$\left|\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - \int_0^x \partial_y h(s,y_0)ds\right| \leqslant \int_0^x |\partial_y h(s,y(s)) - \partial_y h(s,y_0)|ds$$
$$\leqslant |x| \sup_{(s,y_1)\in[0,x]\times[y_0,y]} |\partial_y h(s,y_1) - \partial_y h(s,y_0)| \to 0$$

für $y \to y_0$, da $\partial_y h$ stetig, also auf $[0,x] \times [y_0, y]$ gleichmässig stetig ist. Wir haben also $\partial_y f(x,y) = \int_0^x \partial_y h(s,y) ds$. Dieser Ausdruck ist stetig:

$$\begin{aligned}
|\partial_y f(x,y) - \partial_y f(x_0,y_0)| &\leqslant |\partial_y f(x,y) - \partial_y f(x,y_0)| + |\partial_y f(x,y_0) - \partial_y f(x_0,y_0)| \\
&\leqslant \int_0^x |\partial_y h(s,y) - \partial_y h(s,y_0)| ds + \int_{x_0}^x |\partial_y h(s,y_0)| ds \\
&\leqslant |x| \sup_{(s,y_1)\in[0,x]\times[y_0,y]} |\partial_y h(s,y_1) - \partial_y h(s,y_0)| \\
&+ |x - x_0| \sup_{s\in[x_0,x]} |\partial_y h(s,y_0)| \to 0
\end{aligned}$$

für $x \to x_0$ und $y \to y_0$ mit $y > y_0$ und $x > x_0$.
Wir schliessen, dass f differenzierbar ist mit

$$df(x,y) = (h(x,y), \int_0^x \partial_y h(s,y) ds).$$

(b) Kettenregel und $g(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ ergeben $u'(t) = h(t,t) + \int_0^t \partial_y h(s,t) ds$

4. Es gilt für das Polynom $f(x,y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$ dass

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - y_1) & 2(x_2 - y_2) & \cdots & 2(x_n - y_n) & -2(x_1 - y_1) & \cdots & -2(x_n - y_n) \end{pmatrix}$$

5. (a) Es gilt

$$\partial_{A_{kl}} m_{i,j}(A,B) = \partial_{A_{kl}} \sum_{m=1}^n A_{im} B_{mj} = \delta_{ik} B_{lj}$$

und

$$\partial_{B_{kl}} m_{i,j}(A,B) = \partial_{B_{kl}} \sum_{m=1}^n A_{im} B_{mj} = A_{ik} \delta_{lj}$$

Also:

$$dm(\mathbb{I}, \mathbb{I}) = (\mathbb{I}, \mathbb{I})$$

(b) $U = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist offen, da die Determinante als Polynom stetig ist. Die Funktion inv ist C^1, da die Einträge der Inversen einer Matrix nach der Cramerschen Regel rationale Funktionen sind, wobei im Nenner die Determinante steht, welche auf U nicht verschwindet.

(c) Sei $g(A) = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$. Es bezeichne 1 die Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}^{n^2}$.
Die Gleichung $AA^{-1} = \mathbb{I}$ besagt, dass die Funktion

$$m \circ (1, \mathrm{inv}) \circ g$$

konstant ist. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= d(m \circ (1, \mathrm{inv}) \circ g)(\mathbb{I})A \\
&= dm(\mathbb{I}, \mathbb{I}^{-1}) \circ d(1, \mathrm{inv})(\mathbb{I}, \mathbb{I}) \circ dg(\mathbb{I})(A) \\
&= dm(\mathbb{I}, \mathbb{I}) \circ (\mathbb{I}, d\mathrm{inv}(\mathbb{I})) \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \\
&= dm(\mathbb{I}, \mathbb{I}) \begin{pmatrix} A \\ d\mathrm{inv}(\mathbb{I})A \end{pmatrix} = A + d\mathrm{inv}(\mathbb{I})(A)
\end{aligned}$$

Also $d\mathrm{inv}(\mathbb{I})(A) = -A$.