MATH, PHYS, CHAB Analysis I HS 2013
Prof. Dr. E. Kowalski

Zwischentest Winter 2014

Bei einigen Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein.

Einsendeschluss: **Der Test wird nicht eingereicht. Am Montag, den 3.3.2014 wir eine Musterlösung veröffentlicht.**

---

1. Für $n \geq 1$, sei $A_n =]1/n, 1 - 1/n^2[$. Was ist die Vereinigung der Mengen A_n?

√ (a) $]0, 1[$

(b) $[0, 3/4[$

(c) $]0, 1]$

Jedes A_n ist in $[0, 1]$ enthalten, und jede Zahl in $]0, 1[$ liegt in einem der A_n, aber $0 \notin A_n$ und $1 \notin A_n$.

2. Für $n \geq 1$, sei $A_n =]1/n, 1 + \sqrt{n}]$. Was ist der Durchschnitt der Mengen A_n?

(a) $]0, 1[$

(b) $[1, 2]$

√ (c) $]1, 2]$

(d) $[1, +\infty[$

Man sieht, dass $A_{n+1} \supset A_n$ für alle $n \geq 1$, also ist der Durchschnitt gleich A_1, was $]1, 2]$ ist.

3. Seien A_n, für $n \geq 1$, Teilmengen von $\mathbb{R}$. Sei

$$C = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m.$$

Wie kann man die Menge C beschreiben?

(a) Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, sodass x in genau einem der A_n liegt.

(b) Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, welche in allen A_n liegen.

(c) Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, welche in keinem der A_n liegen.

√ (d) Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, welche in unendlich vielen der A_n liegen.

$x \in C$ heisst, dass für alle $n \geq 1$ ein m *grösser gleich* n existiert, sodass $x \in A_n$; insbesondere, $x \in C$ genau dann, wenn die Menge $I \subset \mathbf{N}$ aller n mit $x \in A_n$ unbeschränkt ist, und deshalb genau dann, wenn I nicht endlich ist.

4. Sei $P(x)$ ein Prädikat in Abhängigkeit von einer reellen Zahl x. Welche der folgenden Aussagen impliziert, dass $P(x)$ für wenigstens drei verschiedene reelle Zahlen wahr ist:

√ (a) $\forall x\, P(x)$

(b) $\exists x\, P(x)$

Dies garantiert nur, dass $P(x)$ für eine reelle Zahl wahr ist.

(c) $\forall y,\ \exists x \neq y\, P(x)$

Dies garantiert nur, dass $P(x)$ für zwei Werte von x gilt (nehmen Sie z.B. $P(x)$ als $x(x-1) = 0$.)

(d) $\exists x \neq 0,\ P(x) \wedge P(2x) \wedge P(x+1)$

Falls das gegebene x gleich 1 ist, wissen wir nur, dass $P(1)$ und $P(2)$ wahr sind.

(e) $P(x) \Rightarrow P(x+1)$

Es ist möglich, dass $P(x)$ für kein x wahr ist.

5. Betrachten Sie die Abbildungen

$$f \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathcal{P}(\mathbf{R}) \\ x \mapsto [x, x+1[\end{cases}, \qquad g \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathcal{P}(\mathbf{Z}) \\ x \mapsto \{n \in \mathbf{Z} \mid |n| \leq |x|\} \end{cases},$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) f ist injektiv.

Man kann x durch $x = \min f(x)$ zurückerhalten.

(b) f ist surjektiv.

Gegenbeispiel: $\{0\}$ ist nicht im Bild von f.

(c) Wenn $x \leq y$, dann ist $f(x) \subset f(y)$.

(d) $\emptyset$ ist im Bild von g.

0 ist immer in $g(x)$.

√ (e) g ist nicht injektiv.

Zum Beispiel $g(0) = g(1/2) = \{0\}$.

√ (f) Falls $0 \leq x \leq y$, dann gilt $g(x) \subset g(y)$.

6. Welche der folgenden Definitionen definieren reelle Zahlen:

√ (a) $x = \inf\{x > 0 \mid \sin(x) = 0\}$

(b) $x = \inf\{x > 0 \mid \cos(x^2) = 2\}$

Die Menge ist leer und hat also kein Infimum.

√ (c) $x = \max\{x \in [0,1] \mid x \in \mathbf{Q}\}$

(d) $x = \max\{x \in [0,1] \mid x^2 \notin \mathbf{Q}\}$

Es gibt rationale Zahlen, die beliebig nahe an 1 sind.

(e) $x = \inf\{x \in \mathbf{R} \mid \cos(x) = 0\}$

7. Welche der folgenden Aussagen implizieren, dass eine gegeben Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen konvergiert:

√ (a)
$$\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists N \geq 1, \forall n \geq N,\ |a_n - a| < 10\varepsilon.$$

(b)
$$\forall \varepsilon \in]1,+\infty[, \exists N \geq 1, \forall n \geq N,\ |a_n| < \varepsilon.$$

Falls $a_n = (-1)^n/2$ für alle n ist, dann gilt die Aussage, aber die Folge konvergiert nicht.

√ (c)
$$\exists N \geq 1\ \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 2N, \forall m \geq 2N\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Für alle n und $m \geq 2N$ gilt $a_n = a_m$, eine Konstante also, sodass die Folge gegen diese Konstante konvergiert.

(d)
$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \geq 1,\ \exists n \geq N, \exists m \geq N,\ |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

Dies ist die negation der Chaucy-Kriteriums.

8. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $a_{n+1} \geq a_n > 0$ für alle $n \geq 0$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr:

(a) Die Folge (a_n) konvergiert gegen eine reelle Zahl α.

Gegenbeispiel: $a_n = n$.

√ (b) Die Folge (a_n) konvergiert gegen eine reelle Zahl α, oder sie konvergiert gegen ∞.

√ (c) Die Folge $b_n = 1/a_n$ konvergiert.

(d) Die Folge $b_n = \cos(a_n)$ konvergiert.

Gegenbeispiel: $a_n = n\pi$ erfüllt $\cos(a_n) = (-1)^n$, was nicht konvergiert.

9. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

absolut konvergiert. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

√ (a) Die Reihe $\sum_n a_n \cos(n)$ konvergiert absolut.

√ (b) Die Reihe $\sum_n a_n^2$ konvergiert absolut.

Es gilt $|a_n| \leq 1$ für n gross genug und daher $|a_n|^2 \leq |a_n|$ für n gross genug.

(c) Die Reihe $\sum_n (-1)^n \sqrt{|a_n|}$ konvergiert absolut

Gegenbeispiel: $a_n = n^{-2}$.

10. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zu der Negation der gleichmässigen Konvergenz der Funktionen (f_n), welche auf $[0,1]$ definiert sind, gegen eine Funktion f:

(a)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N, \forall x \in [0,1],\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Diese Aussage besagt genau, dass (f_n) gleichmässig gegen f konvergiert.

(b)

$$\forall x \in [0,1],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dies ist die Aussage, dass $f_n(x) \to f(x)$ für alle x.

√ (c)

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \geq 1,\ \exists n \geq N, \exists x \in [0,1],\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

(d)

$$\exists x \in [0,1],\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \geq 1,\ \exists n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Dies ist die Negation der punktweisen Konvergenz. Diese Aussage impliziert die Negation der gleichmässigen Konvergenz, ist allerdings nicht äquivalent.

11. Sei $f :]0,1[\to \mathbf{R}$ stetig. Welche der folgenden Funktionen g sind wohldefiniert und stetig:

√ (a) $g(x) = f(x)^2 + \exp(f(x))$ for $x \in]0,1[$.

(b) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x) = 0 \\ 1/f(x) & \text{falls } x \in]0,1[\text{ und } f(x) \neq 0 \end{cases}$

Gegenbeispiel: $f(x) = 2x - 1$.

(c) $g(x) = f(f(x))$

Dies ist nicht immer wohldefiniert, falls f nur auf $]0,1[$ definiert ist.

12. Sei $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ stetig. Welche der folgenden Funktionen ist beschränkt:

√ (a) $x \mapsto f(x^2)$

(b) $x \mapsto \frac{1}{f(x)^2 - 1}$

13. Sei f eine Funktion auf $\mathbf{R}$ welche die folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall \varepsilon \in]0, 1/100[,\ \exists \delta > 0\, (|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon).$$

Ist f stetig?

√ (a) Ja

(b) Nein

Verifizieren Sie, dass diese Aussage die Aussage mit $\varepsilon > 0$ impliziert; dann benutzen Sie die ε-δ Definition und wenden die Aussage für $\varepsilon/2$ an.

14. Welche der folgenden Aussagen über Funktionen, welche auf $\mathbf{R}$ definiert sind, sind wahr:

(a) Wenn f nicht stetig ist, dann ist $|f|$ auch nicht stetig.

Nehmen Sie eine unstetige Funktion, sodass $|f|$ konstant ist.

√ (b) Wenn f nicht stetig ist, dann ist $\exp(f(x))$ nicht stetig.

Wir haben $f = \log(\exp(f))$. Falls $\exp(f)$ stetig wäre, dann wäre auch f stetig.

15. Welche der folgenden für $x \in \mathbf{R}$ definierten Funktionen sind differenzierbar:

√ (a)
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^n}.$$

Diese Potenzreihe konvergiert absolut für alle x und ist also termweise differenzierbar.

√ (b) $f(x) = \cos(|x|)$

Da $\cos(-x) = \cos(x)$, gilt $\cos(|x|) = \cos(x)$.

(c) Die charakteristische Funktion von $\mathbf{Q}$.

Diese Funktion ist nicht stetig.

16. Sei f auf $[0, 1]$ differenzierbar; welche Eigenschaften sind wahr:

√ (a) f ist beschränkt.

Die Funktion ist stetig.

(b) Die Ableitung von f ist beschränkt.

Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

(c) Entweder f oder $-f$ ist konvex.

17. Sei $f(x) = \exp(x^2/2)$ für $x \in \mathbf{R}$. Welche der folgenden Polynome sind Taylor-Polynome für f bei $x = 0$:

(a) $P_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

√ (b) $P_2(x) = 1$

(c) $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$

√ (d) $P_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}$

Das Taylor-Polynom vom Grad $\leqslant k$ ist

$$f(0) + f'(0)X + \frac{f''(0)}{2}X^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}X^k$$

Man kann die Ableitungen explizit berechnen.

18. Sei f von der Klasse C^3 auf $[0,1]$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

√ (a) Wenn $f'(1/2) \neq 0$, dann hat f kein lokales Extremum bei $1/2$.

(b) Wenn $f'(0) \neq 0$, dann hat f kein lokales Extremum bei 0.

Gegenbeispiel: $f(x) = x$.

√ (c) Wenn $f'(1/3) = 0$ und $f''(1/3) = 3$, dann hat f ein lokales Minimum bei $1/3$.

(d) Wenn $f''(1/10) = 0$ und $f^{(3)}(1/10) < 0$, dann hat f ein lokales Maximum bei $1/10$.

Die erste Ableitung bei $1/10$ könnte verschieden von Null sein. In diesem Fall gäbe es kein lokales Extremum.

(e) Wenn $f(2/5) = f'(2/5) = f''(2/5) = 0$ und $f^{(3)}(2/5) = 1$, dann hat f ein Minimum bei $2/5$.

f hat kein Minimum dort, da 3 ungerade ist.

19. Sei $f : [0,1] \to]0, +\infty[$ eine konvexe Funktion in $C^2([0,1])$. Welche der folgenden auf $[0,1]$ definierten Funktionen g sind konvex:

(a) $g(x) = 1/f(x)$

Gegenbeispiel: $f(x) = 1 + (1-x)^2$.

√ (b) $g(x) = f(x)^2$

Die zweite Ableitung ist nach den gegebenen Annahmen $2(f')^2 + 2ff'' \geq 0$.

√ (c) $g(x) = x + f(x)$