MATH, PHYS, CHAB | Analysis I/II | HS 2013/FS 2014
Prof. Dr. E. Kowalski

Zwischenprüfung

1.

1. Was ist die Definition einer Ordnungsrelation R auf einer Menge X?

2. Sei $X = \{A, B, C, D\}$, wobei $A, \ldots, D$ Teams repräsentieren sollen, welche an einem Wettkampf teilnehmen. Die Ergebnisse des Wettkampfs sind

	A	B	C	D
A		A	C	D
B	A		B	B
C	C	B		C
D	D	B	C	

   wobei jeder Matrixeintrag angibt, welches Team gewonnen hat (zum Beispiel gewann A gegen B.)

   Definieren Sie eine Relation R auf X durch xRy falls entweder $x = y$ oder das Team x das Team y im Wettkampf besiegt hat.

   Ist R eine Ordnungsrelation?

3. Es sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und

$$X = \{F \subset E \mid F \neq \{0\} \text{ ist ein Unterraum von } E\}.$$

   Man definiert eine Relation R auf X, sodass $F_1 R F_2$ genau dann gilt wenn, $F_1 \supset F_2$.

   Zeigen Sie, dass R eine Ordnungsrelation auf X ist. Gibt es in X ein Minimum? Ein Maximum?

2.

1. Was ist die Definition der absoluten Konvergenz einer Reihe $\sum a_n$, wobei $a_n \in \mathbb{R}$?

2. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)\cos(nx)}{n^3}$$

   für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, und dass die Summe dieser Reihe durch eine Konstante $C \geq 0$ beschränkt ist, welche unabhängig von x ist.

3.

1. Geben Sie zwei äquivalente Definitionen der Aussage: "$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig."

2. Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ an, sodass f^2 stetig ist, aber f nicht.

3. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung (mit Beweis) an f dafür, dass die Funktion

$$g \quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \\ x \mapsto 0 & \text{falls } x > 1 \\ x \mapsto 1 & \text{falls } x < 0 \\ x \mapsto f(x) & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

4. Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = g(x + (1, \ldots, 1))^2\}$$

   abgeschlossen ist, und dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1 - g(x^2)\}$$

   offen ist.

5. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Nehmen Sie weiter an, dass $f(0) = 1$ und $g(1) = 7/8$. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$, die Ungleichung

$$f(x) > g(e^x)$$

   gilt.

6. Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j \text{ falls } i \neq j\}$$

   offen in $\mathbb{R}^n$ ist. (Hinweis: Schreiben Sie die Menge als Schnittmenge offener Mengen).

4. Es sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Wir definieren eine Abbildung

$$N \quad \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{i=1}^n i|x_i|. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass N eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. es gilt
   - $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N(x) \geq 0$
   - $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in \mathbb{R},\ N(tx) = |t|N(x)$.
2. Zeigen Sie, dass es positive reelle Zahlen a_1, a_2 gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$a_1\|x\|_\infty \leq N(x) \leq a_2\|x\|_\infty.$$
3. Zeigen Sie, dass die Menge
$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid N(x - (1, \ldots, 1)) \leq 2\}$$
eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge ist.
4. Es sei
$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$
Zeigen Sie, dass N auf U differenzierbar ist, aber dass N bei 0 nicht differenzierbar ist.

5.

1. Was ist die Definition der Taylor-Polynome einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bei $x = 0$?
2. Seien f, $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ zwei Funktionen der Klasse C^2, welche konvex sind. Nehmen Sie an, dass
$$f(0) \geq 0, \quad g(0) \geq 0, \quad f'(0) \geq 0, \quad g'(0) \geq 0.$$
Zeigen Sie, dass fg konvex ist.
3. Was ist eine notwendige und hinreichende Bedingung an eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dafür, auf einem offenen Intervall, welches $x_0 \in \mathbb{R}$ enthält, konvex zu sein?

6. Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl, $c \geq 0$, $(t_1, \ldots, t_n)$ verschiedene reelle Zahlen mit

$$|t_i| \leq c$$

für $1 \leq i \leq n$, und $(a_1, \ldots, a_n)$ reelle Zahlen, sodass

$$0 < a_i < 1, \qquad a_1 + \cdots + a_n = 1, \qquad t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n = 0.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{t_i x}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und dass $\varphi(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
2. Es sei $f(x) = \log(\varphi(x)) - c^2 x^2/2$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \leq 0).$$
3. Zeigen Sie dann, dass
$$\varphi(x) \leq \exp\Big(\frac{c^2 x^2}{2}\Big)$$
für $x \in \mathbb{R}$.

7. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1. Für $n \geq 1$, schreiben Sie die Summe

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(\frac{i}{n}\Big)$$

als

$$S_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

wo f_n eine einfache Treppenfunktion ist.

2. Zeigen Sie, dass f_n gegen f gleichmässig konvergiert (Hinweis: benützen Sie die gleichmässige Stetigkeit von f.) Was ist dann

$$\lim_{n \to +\infty} S_n?$$

3. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+i^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i^3$$

mit dieser Idee.

8.

1. Geben Sie das Cauchy-Lipschitz Theorem zum Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

an, wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist, welche Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}^2$ in der Variablen t ist (d.h. $y \mapsto f(t, y)$ ist Lipschitz stetig für t fest).

2. Sei $\alpha \neq 1$ eine reelle Zahl. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = t|y|^\alpha \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung f_α gibt, welche auf einem Intervall I_α mit $0 \in I_\alpha$ definiert ist, und dass $f_\alpha(t) > 0$ für t klein genug.

3. Berechnen Sie die Lösung f_α (Hinweis: Erklären Sie, warum man durch y^α teilen darf und integrieren Sie); auf welchem Intervall, das 0 enthält, (abhängig von α) ist sie definiert?

4. Was passiert für $\alpha = 1$?

9.

1. Erklären Sie die Definition der Aussage: "$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle 0 differenzierbar mit Differential A".

2. Es sei f die Abbildung

$$f \quad \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2 - y^2 - y, -2xy + x) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Bestimmen Sie die Menge

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid df_{(x,y)} \text{ ist nicht invertierbar}\}.$$

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, berechnen Sie $df_{(x,y)}$.

3. Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.

4. Berechnen Sie $f(0, 0)$ und $f(0, -1)$. Zeigen Sie, dass es Umgebungen U_1 und U_2 von $(0, 0)$, Umgebungen V_1 von $(0, 0)$, V_2 von $(0, -1)$, und differenzierbare Abbildungen

$$g : U_1 \to V_1, \quad h : U_2 \to V_2$$

gibt, so dass g (bzw. h) die Umkehrabbildung der Einschränkung von f auf V_1 (bzw. auf V_2) ist. Bestimmen Sie die Differentiale $dg_{(0,0)}$ und $dh_{(0,0)}$.

10. Es sei $n \geq 1$ und

$$f \quad \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (\mathrm{Re}((x+iy)^n), \mathrm{Im}((x+iy)^n)). \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2. Zeigen Sie, dass für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

wo

$$\alpha + i\beta = n(x+iy)^{n-1}.$$