Lösung 11

1. Zuerst bemerken wir, dass

$$(u,v)_* := \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v dx$$

ein Skalarprodukt auf $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ definiert, welches äquivalent zum H^2-Standard-Skalarprodukt ist. Die Existenz einer Lösung u, welche

$$\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \text{für alle} \quad v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$$

erfüllt, folgt aus dem Satz von Riesz. Wie in Aufgabe 3b), Serie 10 ist u schwache Lösung von

$$\Delta^2 u = f \quad \text{in} \quad \Omega$$

und da $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Wir zeigen nun, dass die zweite Randbedingung

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

ist. Dafür nehmen wir zuerst an, dass $u, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ist. Um zu sehen, dass $\Delta u = 0$ ist auf $\partial\Omega$, betrachten wir die Funktion $v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ und integrieren partiell. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f v dx &= \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v dx \\
&= -\int_\Omega \langle \nabla \Delta u, \nabla v \rangle dx + \int_{\partial\Omega} \Delta u \langle \nabla v, \nu \rangle do \\
&= \int_\Omega (\Delta^2 u) v dx + \int_{\partial\Omega} \left(\Delta u \langle \nabla v, \nu \rangle - v \langle \nabla \Delta u, \nu \rangle \right) dx \\
&= \int_\Omega (\Delta^2 u) v dx + \int_{\partial\Omega} \Delta u \langle \nabla v, \nu \rangle dx.
\end{aligned}$$

Angenommen v ist in $C_c^\infty(\Omega)$. Dann verschwindet der letze Randterm auch noch und wir erhalten

$$\Delta^2 u = f \in L^2(\Omega)$$

Bitte wenden!

im distributiven Sinn. Indem wir $v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ approximieren durch glatte Funktionen v_k erhalten wir aus der oberen Identität

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} \Delta u \langle \nabla v, \nu \rangle dx \quad \text{für alle} \quad v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega),$$

also

$$\int_{\partial\Omega} \Delta u \langle \nabla v, \nu \rangle dx = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega).$$

Das liefert uns, dass $\Delta u = 0$ ist auf $\partial\Omega$.

Für den allgemeinen Fall muss man zuerst zeigen, dass $u \in H^4(\Omega)$ ist. Das folgt aus Aufgabe 2a) und der Eindeutigkeit: nimm die eindeutige Funktion $\bar{u} \in \Xi$, so dass

$$\Delta^2 \bar{u} = f$$

ist. Dann erfüllt $\bar{u}$ die Gleichung

$$\int_\Omega \Delta \bar{u} \cdot \Delta v dx = \int_\Omega f v dx \quad \text{für alle} \quad v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega).$$

Aus der Eindeutigkeit folgt dann $u = \bar{u}$. Jetzt ist $\Delta u\big|_{\partial\Omega}$ wohldefiniert und es ist 0.

2. **a)** Für die Injektivität zeigen wir, dass $\operatorname{kern}(\Delta^2) = \{0\}$ ist. Sei $u \in \Xi$ mit $\Delta^2 u = 0$. Dann ist $v := \Delta u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ mit $\Delta v = 0$, also $\Delta u = v = 0$. Analog bekommen wir für $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ dann $u = 0$, was die Injektivität zeigt.

Für die Surjektivität sei $f \in L^2(\Omega)$. Sei weiter $v \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von

$$\Delta v = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

Auso Satz $9.1.2.$ folgt $v \in H^2(\Omega)$. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von

$$\Delta u = v \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

Da $v \in H^2(\Omega)$ ist, folgt dann wieder mit Satz $9.1.2.$, dass $u \in H^4(\Omega)$ ist. Also ist $u \in \Xi$ mit $\Delta^2 u = f$, was die Surjektivität zeigt.

Da Δ^2 linear ist, ist es sogar ein Isormorphismus.

b) Für jedes $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0 = \Delta\varphi\big|_{\partial\Omega}$ haben wir

$$\int_{\partial\Omega} u \langle \nabla \Delta \varphi, \nu \rangle do = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \Delta\varphi \langle \nabla u, \nu \rangle do = 0,$$
$$\int_{\partial\Omega} \Delta u \langle \nabla \varphi, \nu \rangle do = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Omega} \varphi \langle \nabla \Delta u, \nu \rangle do = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir integrieren jetzt viermal partiell und verwenden diese Identitäten. Damit erhalten wir wie gewünscht

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\Delta^2\varphi dx &= -\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\Delta\varphi\rangle dx = \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta\varphi dx \\ &= -\int_\Omega \langle \nabla\Delta u, \nabla\varphi\rangle dx = \int_\Omega \Delta^2 u \cdot \varphi dx \\ &= \int_\Omega f\varphi dx.\end{aligned}$$

c) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Seien weiter $v, \psi \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ die eindeutigen Lösungen von

$$\Delta v = f \quad \text{und} \quad \Delta\psi = \varphi.$$

Mit Satz $9.1.1.$ und Satz $9.1.2.$ erhlaten wir also $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$. Wähle nun $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to f$ in L^2 für $k \to \infty$. Wähle $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ mit $\Delta v_k = f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann bekommen wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_k\psi dx &= \int_\Omega \Delta v_k \cdot \psi dx \\ &= \int_\Omega v_k \Delta\psi dx + \int_{\partial\Omega} (\psi\langle\nabla v_k, \nu\rangle - v_k\langle\nabla\psi, \nu\rangle) do \\ &= \int_\Omega v_k\Delta\psi dx = \int_\Omega v_k\varphi dx.\end{aligned}$$

Mit $k \to \infty$ folgt mit der Hölder'schen Ungleichung, dass

$$\int f\psi dx = \int v\varphi dx,$$

wobei wir verwendet haben, dass $v_k \to v$ in $L^2(\Omega)$ für $k \to \infty$ nach Satz $9.1.2.$. Damit folgt

$$\int_\Omega u\Delta\varphi dx = \int_\Omega u\Delta^2\psi dx = \int_\Omega f\psi dx = \int_\Omega v\varphi dx.$$

Da dies für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt, folgt

$$\Delta u = v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$$

und damit ist $u \in H^4 \cap H_0^1(\Omega)$ nach Satz $9.1.2.$. Also ist $u \in \Xi$.

3. Seien $U = H(\tilde{U})$, und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ zwei Karten. (Falls keine solche Karten existieren, kann man lokal mit einer Partition der Eins arbeiten.) Seien

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \quad \text{und} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial y^j}\right\}_{j\in\{1,\dots,n\}}$$

Bitte wenden!

eine Basis von $TM_{H(p)}$ beziehungsweise TN_p. Dann gilt

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad \text{und} \quad h_{ij} = h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right).$$

Wie hängen (g_{ij}) und (h_{ij}) zusammen? Wir wissen, dass

$$h_{ij}(p) = h_p\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = g_{H(p)}\left(dH_p\frac{\partial}{\partial y^i}, dH_p\frac{\partial}{\partial y^j}\right).$$

Für eine Funktion $v \in C^\infty(M)$ gilt

$$\begin{aligned} dH\frac{\partial}{\partial y^i}(v) :&= \frac{\partial}{\partial y^i}(v \circ H \circ \psi^{-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y^i}((v \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ H \circ \psi^{-1})) \\ &= \frac{\partial(v \circ \varphi^{-1})}{\partial x^l} \circ (\varphi \circ H \circ \psi^{-1})\frac{\partial}{\partial y^j}(\varphi^l \circ H \circ \psi^{-1}) \\ &=: A_i^l \frac{\partial}{\partial x^l}(v \circ \varphi^{-1}) \end{aligned}$$

mit $A_i^l = \frac{\partial}{\partial y^i}(\varphi^l \circ H \circ \psi^{-1})$. Wir sehen, dass

$$dH\frac{\partial}{\partial y^i} = A_i^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$

und

$$h_{ij} = g\left(A_i^l\frac{\partial}{\partial x^l}, A_j^m\frac{\partial}{\partial x^m}\right) = A_i^l A_j^m g_{lm} = (A^T g A)_{ij} \tag{1}$$

ist. Wir berechnen jetzt $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, was nach Definition

$$\frac{\partial(u \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}$$

ist, und $\frac{\partial(u \circ H)}{\partial y^i}$, was

$$\frac{\partial(u \circ H \circ \psi^{-1})}{\partial y^i}$$

ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^i}(u \circ H \circ \psi^{-1}) &= \frac{\partial}{\partial y^i}((u \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ H \circ \psi^{-1})) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^l}(u \circ \varphi^{-1})A_i^l. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u\circ H)}{\partial y^i}\frac{\partial(u\circ H)}{\partial y^j} &= \frac{\partial}{\partial x^l}(u\circ\varphi^{-1})A_i^l\frac{\partial}{\partial x^m}(u\circ\varphi^{-1})A_j^m \\ &= A_i^lA_j^m\frac{\partial}{\partial x^l}(u\circ\varphi^{-1})\frac{\partial}{\partial x^m}(u\circ\varphi^{-1}). \qquad (2)\end{aligned}$$

Wenn wir in Gleichung (1) die Inverse nehmen, erhalten wir

$$A_j^mA_i^lh^{ij} = g^{lm}. \qquad (3)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}e := g^{lm}\frac{\partial u}{\partial x^l}\frac{\partial u}{\partial x^m} &= A_j^mA_i^lh^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^l}\frac{\partial u}{\partial x^m} \\ &= h^{ij}\frac{\partial(u\circ H)}{\partial y^i}\frac{\partial(u\circ H)}{\partial y^j} \\ &= e\circ H.\end{aligned}$$

Die Funktion e heisst Energiedichte von u. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\int_{\varphi(U)} e\circ\varphi^{-1}\sqrt{|g|}dx = \int_{\psi(\tilde{U})}(e\circ H\circ\psi^{-1})\sqrt{|h|}dy.$$

Wir haben nach Definition $y = \psi\circ H^{-1}\circ\varphi^{-1}(x)$. Dann ist

$$dy = |\det(d(\psi\circ H^{-1}\circ\varphi^{-1}))dx|.$$

Mit der Substitutionsregel bekommen wir also

$$\begin{aligned}&\int_{\psi(\tilde{U})}(e\circ H\circ\psi^{-1})\sqrt{|h|}dy \\ &= \int_{(\varphi\circ H\circ\psi^{-1})(\psi(\tilde{U}))}\underbrace{(e\circ H\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ H^{-1}\circ\varphi^{-1})}_{=e\circ\varphi^{-1}}\sqrt{|h|\circ\psi\circ H^{-1}\circ\varphi^{-1}}\underbrace{|\det(d(\psi\circ H^{-1}\circ\varphi^{-1}))|}_{|\det(A^{-1})|=|\det(A)^{-1}|}dx.\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned}\sqrt{|h|\circ\psi\circ H^{-1}\circ\varphi^{-1}} &= \sqrt{\det(A_i^lA_j^mg_{lm})\circ\varphi^{-1}} \\ &= |\det(A)|\sqrt{|g|\circ\varphi^{-1}}\end{aligned}$$

und wir folgern, dass

$$\int_{\psi(\tilde{U})}(e\circ H\circ\psi^{-1})\sqrt{|h|}dy = \int_{\varphi(U)}(e\circ\varphi^{-1})\sqrt{|g|}dx,$$

wie behauptet.