Serie 11

1. **a)** Berechne die Singulärwertzerlegung $A = VDU^T$ der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das heisst: U und V sind orthogonal und für $D = (d_{ij})$ gilt $d_{ij} = 0$, falls $i \neq j$.

b) Berechne die Singulärwertzerlegung von A^T.

2. Seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume mit Skalarprodukten. Die Singulärwerte von $f : V \to W$ sind definiert als die Quadratwurzeln der strikt positiven Eigenwerte von $f^* \circ f$.

Zeige: Eine strikt positive reelle Zahl σ ist genau dann ein Singulärwert von f, wenn es Vektoren $v \in V \setminus \{0\}$ und $w \in W \setminus \{0\}$ gibt mit $f(v) = \sigma w$ und $f^*(w) = \sigma v$.

3. Zeige mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums: Die quadratische Form $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

ist positiv definit. Sei nun M die Koordinatenmatrix von q bezüglich der Standardbasis. Berechne die Cholesky-Zerlegung von M. Das heisst: finde eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$ mit positiven Diagonaleinträgen, sodass $M = LL^T$ gilt.

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien U, V, W (nicht unbedingt endlichdimensionale) $\mathbb{K}$-Vektorräume. Beweise, dass gilt

a) $V \otimes W \cong W \otimes V$,

b) $\mathbb{K} \otimes V \cong V$,

c) $(V \oplus W) \otimes U \cong (V \otimes U) \oplus (W \otimes U)$.

Bitte wenden!

5. **a)** Zeige: Für $v \in V$, $w \in W$ gilt

$$v \otimes w = 0 \in V \otimes W \iff v = 0 \text{ oder } w = 0.$$

b) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig und $w_1, \dots, w_n \in W$ mit $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = 0$.

Zeige, dass $w_1 = \dots = w_n = 0$.

6. Online-Abgabe

1. Die Singulärwerte einer invertierbaren normalen Selbstabbildung eines unitären Vektorraums sind:

(a) die Eigenwerte.

(b) die Quadratwurzeln der Eigenwerte.

(c) die Quadrate der Eigenwerte.

(d) die Absolutbeträge der Eigenwerte.

2. Für welche der folgenden U, V, D ist $A = VDU^*$ eine Singulärwertzerlegung der allgemeinen *unitären* Matrix $A \in U(n)$?

(a) $U = A^*$, $V = I_n$, $D = I_n$.

(b) $U = I_n$, $V = A$, $D = I_n$.

(c) $U = I_n$, $V = I_n$, $D = A$.

(d) $U = S$, $V = S^*$, $D = \text{diag}(e^{i\varphi_1}, ..., e^{i\varphi_n})$ wobei $A = SDS^*$ nach dem Spektralsatz.

Siehe nächstes Blatt!

3. Betrachte:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Welche der folgenden Tensoren sind gleich β?

(a) $-6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) $2e_2 \otimes 3e_2 - 3e_1 \otimes 2e_1.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. Welche der folgenden Aussagen über $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ sind korrekt?

(a) $\dim V = 5.$

(b) $\dim V = 6.$

(c) $\{e_i \otimes 0 \mid i = 1, 2\} \cup \{0 \otimes e_j \mid j = 1, 2, 3\}$ bildet eine Basis von V.

(d) $\{e_i \otimes e_j \mid i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3\}$ bildet eine Basis von V.

5. Welche der folgenden Aussagen über $V = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^3$ sind korrekt?

(a) $\dim V = 5.$

(b) $\dim V = 6.$

(c) $\{(e_i, 0) \mid i = 1, 2\} \cup \{(0, e_j) \mid j = 1, 2, 3\}$ bildet eine Basis von V.

(d) $\{(e_i, e_j) \mid i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3\}$ bildet eine Basis von V.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 12. Mai 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.