Serie 14

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine zu A kongruente Matrix in Normalform und gib die Transformationsmatrix an.

2. Wende auf die Quadrik

$$Q = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 - 15x_1 + 3x_2 = 23\right\}$$

eine Hauptachsentransformation an. Das heisst: Finde eine Koordinatentransformation, sodass die Quadrik bezüglich der neuen Koordinaten von der Form

$$Q = \left\{(y_1, y_2) \;:\; ay_1^2 + by_2^2 = c\right\}$$

ist, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$. Skizziere die Quadrik Q sowohl in den ursprünglichen als auch in den neuen Koordinaten.

3. Im Folgenden seien $A \in \mathrm{Mat}_{dd}(\mathbb{C})$ und $A^* := \overline{A^t}$.

a) Zeige, dass $\exp(tA)$ und A kommutieren.

b) Zeige, dass

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA).$$

c) Zeige, dass

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)).$$

d) Wir definieren die Menge

$$\mathfrak{su}(d) = \{A \in \mathrm{Mat}_{dd}(\mathbb{C}) \;:\; A + A^* = 0 \text{ und } \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

Zeige, dass $\exp(\mathfrak{su}(d)) = \mathrm{SU}(d)$ gilt.

Bemerkung: $\mathfrak{su}(d)$ ist die *Lie Algebra* von $\mathrm{SU}(d)$.

Bitte wenden!

e) Analog definieren wir die Lie Algebra von $\mathrm{SO}(d)$ durch

$$\mathfrak{so}(d) = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{dd}(\mathbb{R}) \ : \ A + A^T = 0 \right\}.$$

Zeige, dass $\exp(\mathfrak{so}(d)) \subseteq \mathrm{SO}(d)$.

Bemerkung: Man kann auch hier zeigen, dass sogar $\exp(\mathfrak{so}(d)) = \mathrm{SO}(d)$ gilt.

4. **a)** Sei $S \in \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n), \quad R \mapsto RS$$

eine Bijektion ist.

b) Berechne den kleinsten Abstand zwischen den beiden Mengen $\mathrm{SO}(2)$ und $\mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A^T B)$.

c) Berechne allgemeiner den kleinsten Abstand zwischen den Mengen $\mathrm{SO}(n)$ und $\mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$.

5. Eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Einselement e heisst *Schiefkörper*, falls für jedes Element $v \neq 0$ ein w mit $v \cdot w = w \cdot v = e$ existiert. Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{H} = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \ : \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

ein Schiefkörper, aber kein Körper ist. $\mathbb{H}$ heisst Hamiltonscher Quaternionenschiefkörper.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Freitag, den 30. Mai 2014 vor 12:00 Uhr im Fächlein im HG J 68. Die korrigierten Serien werden von den Assistenten bis zum 13. Juni zurück ins Fächlein gelegt.