Serie 4

1. Bestimme unter Verwendung der Cramerschen Regel alle $a \in \mathbb{R}$ für die das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & y & & & = & a \\ 3x & - & y & - & z & = & -10 \end{array}$$

eine Lösung mit $y = 1$ besitzt.

2. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{C}),$$

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{C}), \varphi \in \mathbb{R}.$$

3. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei A_α die reelle 4×4-Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

b) Berechne die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

c) Berechne $\det A_\alpha$ und vergleiche die Zahl mit dem Produkt der Eigenwerte von A_α (inklusive Vielfachheiten).

4. Zeige: Jedes Polynom

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \in \mathbb{K}[\lambda]$$

mit $n \geq 1$ ist charakteristisches Polynom einer Matrix in $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$.

Bitte wenden!

Hinweis: Betrachte eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Skalaren in der letzten Zeile und unterscheide die beiden Fälle $(-1)^n = \pm 1$.

Bemerkung: Die so erhaltene Matrix A heisst *Begleitmatrix* des Polynoms P.

5. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ ist und $G(v) \neq 0$, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

b) Ist V endlich dimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

c)* Gib ein Gegenbeispiel zu b) an, falls V nicht endlich dimensional ist.

6. **a)** Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad d. Wir schreiben

$$p(x) = l_1(x)^{k_1} l_2(x)^{k_2} \ldots l_m(x)^{k_m} \cdot q_1(x)^{s_1} q_2(x)^{s_2} \ldots q_n(x)^{s_n},$$

wobei $l_i(x) = x - r_i$ verschiedene lineare Faktoren und $q_j(x) = x^2 + a_j x + b_j$ verschiedene quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen sind. Die Exponenten k_i und s_j sind natürliche Zahlen.

Betrachte die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{l_i(x)^j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i \right\} \cup \left\{ \frac{1}{q_i(x)^j}, \frac{x}{q_i(x)^j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq s_i \right\}.$$

Zeige, dass die Elemente von $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind im Raum der rationalen Funktionen.

b) Sei nun $f \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad kleiner als $d = \deg(p)$. Folgere aus **a)**, dass es reelle Zahlen $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ und $C_{i,j}$ gibt, sodass

$$\frac{f(x)}{p(x)} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{i,j}}{l_i(x)^j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s_i} \frac{B_{i,j}}{q_i(x)^j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s_i} \frac{C_{i,j} x}{q_i(x)^j} \right).$$

Siehe nächstes Blatt!

7. Online-Abgabe

1. Sei A die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $(2, 2, -3, -1)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor von A.

(b) $(3, 3, 3, -4)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor von A.

(c) A hat den Eigenwert $6 = 2 + 0 + 1 + 3$.

(d) Der Eigenraum E_1 zum Eigenwert 1 hat Dimension 2.

2. Sei A eine komplexe $n \times n$ Matrix, $(v_1, \dots, v_n)$ ein Basis aus Eigenvektoren. Dann sind alle Vektoren in $\mathbb{C}^n$ Eigenvektoren

(a) Wahr.

(b) Falsch.

3. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an

(a) Es gibt keinen Körper $\mathbb{K}$, über welchem $(t - 2)$ ein Teiler von $t(t + 1)$ ist.

(b) $(2t - 2)$ ist ein Teiler von $t^4 + 2t^3 - 2t^2 - 3t + 2$ (über $\mathbb{Q}$).

(c) i ist ein Teiler von $2t^5 - 3t^4 + 2t - 1$ (über $\mathbb{C}$).

(d) i und somit auch $-i$ sind Nullstellen von $2t^4 + it^3 + 2t^2 - 1$ (in $\mathbb{C}$).

(e) Die Polynomdivision von $t^6 + t^4 + t^2 + 1$ durch $t - 2$ hat Rest 85 (über $\mathbb{R}$).

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 17. März 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.