Serie 6

1. **a)** Zeige, dass die Menge $\{B \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K}) : AB = BA\}$ für ein gegebenes $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$ ein mindestens eindimensionaler Unterraum von $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$ ist. Zeige ausserdem, dass die Dimension mindestens n ist, falls A diagonalisierbar ist.

b) Bestimme für
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$$
eine Parameterdarstellung eines 3-dimensionalen Unterraumes von $\mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$, dessen Elemente alle mit A kommutieren.

2. Finde eine Matrix T in oberer Dreiecksform, welche ähnlich zur Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ist.

3. Seien W ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $f \in \mathrm{End}(W)$.

a) Zeige: $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn λ ein Eigenwert der dualen Abbildung f^* ist.

b) Sei $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Zeige: Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.

c) Zeige: Wenn $f^2 = f$, dann ist $W = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

4. Welche der folgenden Abbildungen sind Bilinearformen?

a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ (p, q) \mapsto p(0) \cdot q'''(1)$

Bitte wenden!

c) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto A(x,y) \cdot \begin{cases} +1 & \text{falls } (x,y) \text{ positiv orientiert ist,} \\ -1 & \text{falls } (x,y) \text{ negativ orientiert ist,} \\ 0 & \text{falls } (x,y) \text{ linear abhängig ist.} \end{cases}$

Dabei ist $A(x,y)$ die Fläche des Parallelogramms mit Ecken $0, x, x+y, y$.

5. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$.

a) Zeige, dass durch

$$(p,q) := \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}\,dt$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

b) Bestimme die Matrix des Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, x, \ldots, x^n$.

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Abgabe

1. Kreuze die richtigen Aussagen an.

(a) Wenn für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$: $x^{\mathrm{T}} A y = x^{\mathrm{T}} B y$, dann ist $A = B$.

(b) Wenn für alle $x \in \mathbb{C}^n$: $x^{\mathrm{T}} A x = x^{\mathrm{T}} B x$, dann ist $A = B$.

2. Für einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ definieren wir $v^* := \overline{(v^T)}$. Betrachte $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 4 \end{pmatrix}$.
Welche Aussagen sind korrekt?

(a) Für $v = (i, 0)^{\mathrm{T}}$ ist $v^* A v = 1$.

(b) Die Eigenwerte von A sind strikt positiv.

(c) $\forall v \in \mathbb{C}^n \setminus 0, v^* A v > 0$.

3. Eine Matrix $P \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ heisst *positiv definit*, falls für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass $v^T P v > 0$ ist. Seien nun $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ positiv definite Matrizen. Welche Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?

(a) $A + B$ ist positiv definit.

(b) $A - B$ ist positiv definit.

(c) λA ist positiv definit, für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 31. März 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.