Serie 8

1. Im unitären Vektorraum $V = \mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ist eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ durch

$$v_1 = (1,1,1)^T\ ,\ \ v_2 = (0,i,0)^T\ ,\ \ v_3 = (i,0,0)^T$$

gegeben. Ermittle mit dem Gram-Schmidt-Verfahren angewandt auf die Basis $\mathcal{A}$ eine Orthonormalbasis von V. Ermittle ausserdem die Transformationsmatrix $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, wobei $\mathcal{A}$ die gerade berechnete Orthonormalbasis ist. Wie sieht diese Matrix allgemein aus, wenn auf eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ das Gram-Schmidt-Verfahren angewandt wird?

2. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $(1,1,1)^T$ und $(-1,1,0)^T$.

a) Bestimme eine beliebige Orthonormalbasis von U.

b) Lege mit Hilfe dieser Basis die Orthogonalprojektion auf U und die Orthogonalprojektion auf $U^\perp$ je durch ihre Koordinatenmatrizen bzgl. der kanonischen Basis fest.

c) Bestimme je ein lineares Gleichungssystem mit Lösungsmenge U bzw. $U^\perp$.

3. Sei V der euklidische Raum der reellen 2×2-Matrizen mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

Für $u \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $F_u : V \to V$ definiert durch

$$F_u(A) = A^T - u \cdot (\mathrm{tr} A) I_2$$

a) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u selbstadjungiert?

b) Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u orthogonal?

c) Sei $u^* \in \mathbb{R}$ so, dass F_{u^*} sowohl selbstadjungiert als auch orthogonal ist. Welche Abbildung ist dann $F_{u^*} \circ F_{u^*}$?

Bitte wenden!

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ eine reelle, symmetrische Matrix mit $A^k = I$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann bereits $A^2 = I$ gilt.

5. Gegeben ist die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{C}).$$

Bestimme eine Matrix $P \in \mathrm{U}(3)$, sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Abgabe

1. Sei A eine hermitesche Matrix. Welche Aussagen sind korrekt?

(a) $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$.

(b) $\det(A) \in \mathbb{R}$.

2. Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix mit 2 als einzigem Eigenwert. Dann ist $A = 2 \cdot I$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

3. Sei A eine hermitesche $n \times n$-Matrix mit 2 als einzigem Eigenwert. Dann ist $A = 2 \cdot I$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

4. Betrachte die Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$. Welche Aussagen sind korrekt?

(a) (v_1, v_2, v_3) ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich dem Standardskalarprodukt.

(b) Es gibt eine reelle 3×3 Matrix A mit Eigenvektoren v_k zu $\lambda_k = k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, 3)$.

(c) Es gibt eine *symmetrische* reelle 3×3 Matrix A mit Eigenvektoren v_k zu $\lambda_k = k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, 3)$.

(d) Falls $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R})$ symmetrisch ist und die Eigenvektoren v_k hat, dann liegen v_2 und v_3 im gleichen Eigenraum.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 14. April 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.