ETH Zürich FS 2014
D-MATH
Prof. Dr. J. Teichmann

Koordinator
Mayra Bermúdez C.

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 3

1. Das Geburtstagsparadox. Wir betrachten eine Urne mit N Kugeln aus denen wir n Kugeln mit Zurücklegen ziehen.

a) Sei A_n das Ereignis "Alle n Kugeln haben unterschiedliche Nummern. " Berechnen Sie $\mathbb{P}(A_n)$.

b) Beweisen Sie die beiden Ungleichungen

$$1 - \frac{n(n-1)}{2N} \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2N}\right).$$

c) Sei $n_{\min}$ das minimale $n \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbb{P}(A_n) < \frac{1}{2}$ für $N = 365$. Berechnen Sie $n_{\min}$ entweder approximativ unter Verwendung der beiden Ungleichungen im Aufgabenteil b), oder exakt mit einem Taschenrechner, bzw. mit R.

Bemerkung: Im Fall $N = 365$ enstspricht die Nummer der Kugel in Ziehung i dem Geburtstag der i-ten Person in einer Gruppe von n Personen.

2. Wir betrachten eine mehrdimensionale symmetrische Irrfahrt. Seien $d, N \in \mathbb{N}^+$ und

$$\begin{aligned}
\Omega &= \big(\underbrace{\{-1,+1\} \times \ldots \times \{-1,+1\}}_{d-\text{mal}}\big)^N = \{(\omega_{i,j})_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq N} \,:\, \omega_{ij} = \pm 1\}\,,\\
\mathcal{A} &= \{A \,:\, A \subseteq \Omega\},\\
\mathbb{P} &= \text{die Gleichverteilung auf } \Omega,\\
S_n &= (S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(d)}),\ S_0 = (0, \ldots, 0),
\end{aligned}$$

wobei

$$S_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} \qquad\qquad (1 \leq i \leq d).$$

Ferner sei R_n die Anzahl der Besuche in $(0, \ldots, 0)$ bis zur Zeit n.

a) Interpretieren Sie $(S_0, \ldots, S_N)$ als Pfad einer Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$. Zeichnen Sie insbesondere den Pfad, der zu

$$\begin{aligned} &d = 2, N = 5 \quad \text{und} \\ &\omega = ((1,1),\ (1,-1),\ (-1,-1),\ (1,1),\ (-1,1)) \end{aligned}$$

gehört.

b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = (0, \ldots, 0))$.
Hinweis: Benutzen Sie die Formel von Stirling.

c) Benutzen Sie b) um zu entscheiden, ob

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[R_n]$$

endlich oder unendlich ist.
Hinweis: Schreiben sie R_n als eine Summe von Indikatorfunktionen.

3. Das Ruinproblem. Arno und Benno spielen folgendes Spiel: In jeder Runde wird eine faire Münze geworfen. Erscheint Kopf, so zahlt Benno einen Franken an Arno, und umgekehrt bei Zahl. Arnos bzw. Bennos Vermögen vor der ersten Runde beläuft sich auf a bzw. b Franken (a, $b \in \mathbb{N}$). Das Spiel geht zu Ende, wenn einer der beiden kein Geld mehr hat, spätestens aber nach n Runden. Es bezeichne p_n bzw. q_n die Wahrscheinlichkeit, dass Arno bzw. Benno nach diesem Spiel ruiniert ist.

a) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty}(p_n + q_n) = 1$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.
Hinweis: Betrachten Sie die Stoppzeit

$$T_n := \min\Big\{n, \min\big\{k > 0 | S_k \in \{-a, b\}\big\}\Big\}$$

und wenden Sie den Stoppsatz (Satz 2.5) an.

4. R Aufgabe. Für eine Irrfahrt S der Länge $2N$ definieren wir die Aufenthaltszeit oberhalb der Null als die $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable

$$A(\omega) := \big|\{n \in \{1, \ldots, 2N\} | S_n(\omega) \geq 0, S_{n-1}(\omega) \geq 0\}\big|.$$

Implementieren Sie dazu zwei R-Funktionen:

a) Eine Funktion `aufenthalt(S)` welche $A(\omega)$ berechnet, wobei der Inputparameter S ein Vektor der Länge $2N+1$ mit den Einträgen $S_0(\omega), \ldots, S_{2N}(\omega)$ sein soll.

b) Eine Funktion `sim_aufenthalt(N,k)` die das Histogramm für A zeichnet, nämlich von k Simulationen einer Irrfahrt der Länge $2N$. Dabei soll natürlich die Funktion `aufenthalt(S)` aus Punkt a) verwendet werden.

Abgabe der R-Aufgabe:
per Email an die jeweilige AssistentIn bis Dienstag 13 Uhr, im Format:
familienname_vorname_serieNr.R
Webseite: *http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2014/math/wr_s/*