Beispiel: Berechnung einer Fourierreihe

Bestimme die Fourierreihe der geraden und der ungeraden Fortsetzung der Funktion $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

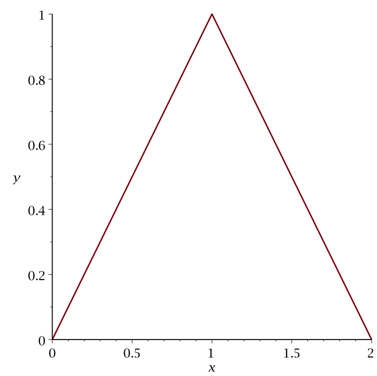

Abbildung 1: Graph von $y = f(x)$ für $L = 2$ und $k = 1$

Wir verwenden die Formel aus der Vorlesung und berechnen zuerst die Koeffizienten für die gerade Fortsetzung. In diesem Fall ist f eine gerade Funktion mit Periode $2L$, somit sind die Koeffizienten b_n alle gleich 0, für die a_n gilt:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{L}\cdot\frac{kL}{2} = \frac{k}{2}$$

weil das Integral hier nichts anderes ist als die Dreiecksfläche des Dreiecks mit Basis L und Höhe $k (= f(\frac{L}{2}))$.

Für die weitere Koeffizienten a_n mit $n \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \\
&= \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2k}{L} x \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx + \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2k}{L} (L - x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \\
&= \frac{2}{L} \left[\frac{2k}{L} x \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{\frac{L}{2}} - \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2k}{L} \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx \\
&\quad + \frac{2}{L} \left[\frac{2k}{L} (L - x) \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{\frac{L}{2}}^{L} - \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}}^{L} -\frac{2k}{L} \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx \\
&= \frac{2}{L} \left[\frac{2k}{L} x \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{2k}{L} \cdot \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{\frac{L}{2}} \\
&\quad + \frac{2}{L} \left[\frac{2k}{L} (L - x) \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} - \frac{2k}{L} \cdot \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_{\frac{L}{2}}^{L} \\
&= \frac{2}{L} \left(\frac{kL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2k}{L} \cdot \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} - 0 - \frac{2k}{L} \cdot \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \right) \\
&\quad + \frac{2}{L} \left(0 - \frac{2k}{L} \cdot \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \cdot \cos(n\pi) - \frac{kL}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2k}{L} \cdot \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{4k}{(n\pi)^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right)
\end{aligned}
$$

Und somit erhalten wir

$$
a_n = \frac{4k}{(n\pi)^2} \begin{cases} 0 & \text{wenn}\, n = 4l + 1, 4l + 3 \\ -4 & \text{wenn}\, n = 4l + 2 \\ 0 & \text{wenn}\, n = 4l \end{cases}
$$

und damit ist die Fourierreihe der geraden Fortsetzung von f gegeben durch

$$
\frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(4l + 2)^2} \cdot \cos \frac{(4l + 2)\pi x}{L}
$$

In der folgenden Abbildung sind ein paar Partialsummen der geraden Fortsetzung skizziert.

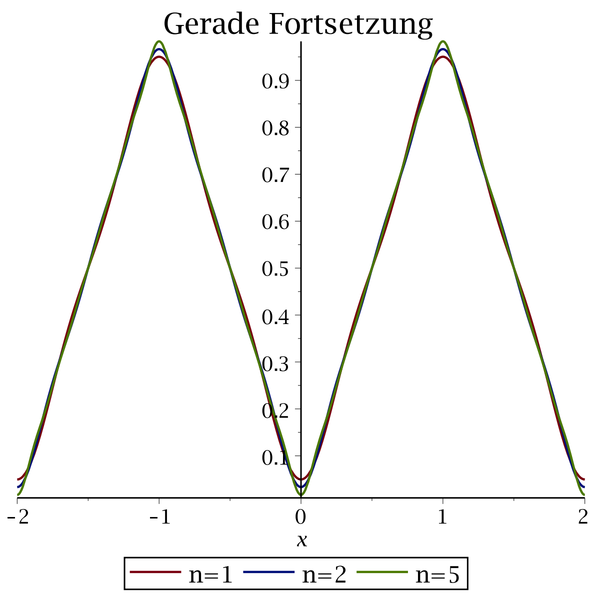

Abbildung 2: Fourierreihe der geraden Fortsetzung von f mit 1,2 und 5 Termen

Beachte, dass die Fourierreihe überall sehr schnell nach f konvergiert. Dies liegt daran, dass f nirgends unstetig ist.
Mit ähnlichen Überlegungen und Berechnungen kann man zeigen, dass die Koeffizienten der ungeraden Fortsetzung von f gegeben sind durch

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Untenstehende Abbildung zeigt ein paar Partialsummen.

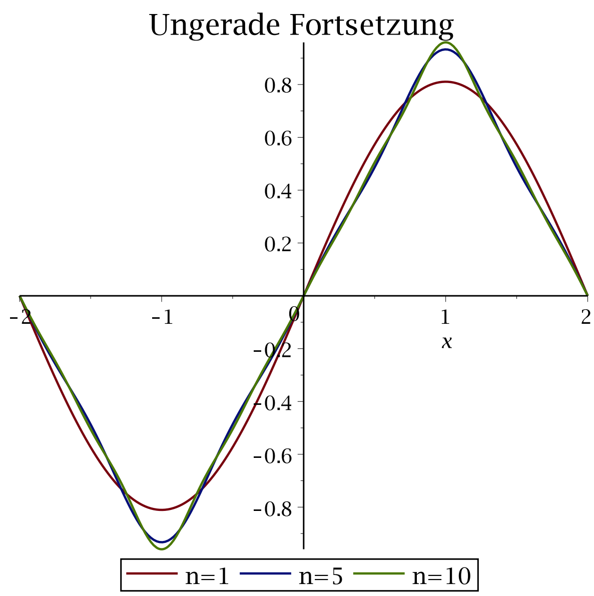

Abbildung 3: Fourierreihe der ungeraden Fortsetzung von f mit 1,5 und 10 Termen