

Die allgemeine Lösung mit den Randbedingungen
ist also $u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{(1-k^2)t} \sin(kx)$ 1

Betrachte nun die Randbedingungen

Anfangsbedingung: $u(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n \sin(kx) = \cos(2x) \sin(x)$ 1/2

Wegen $\sin(x) \cos(2x) \sin(x) = \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$ 1/2
folgt

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 3 \\ -\frac{1}{2} & k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher lautet die Lösung

$$\underline{\underline{u(x, t) = \frac{1}{2}(e^{-8t} \sin(3x) - \sin(x))}}$$
 1/2