8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Begriffsbestimmung

Wir betrachten nur Differentialgleichungen für Funktionen *einer* (reellen) Variablen.

Definition: Für eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^{n+2}$ und eine Funktion $G\colon V \to \mathbb{R}$ heisst

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

eine *(implizite gewöhnliche) Differentialgleichung der Ordnung* n. Jede auf einem Intervall definierte n-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{graph}(y, y', \ldots, y^{(n)}) \subset V$, für welche diese Gleichung gilt, heisst eine *Lösung der Differentialgleichung.*

Kann man die Gleichung nach $y^{(n)}$ auflösen, so erhält man die folgende Variante:

Definition: Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}$ heisst

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

eine *(explizite gewöhnliche) Differentialgleichung der Ordnung* n. Jede auf einem Intervall definierte n-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{graph}(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \subset U$, für welche diese Gleichung gilt, heisst eine *Lösung der Differentialgleichung.*

Geometrische Interpretation: Im Fall $n = 1$ betrachte für jeden Punkt $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ die Richtung der Geraden durch (x, y) mit Steigung $F(x, y)$. Die Gesamtheit dieser Richtungen heisst ein *Richtungsfeld* auf U. Die Differentialgleichung erster Ordnung $y' = F(x, y)$ besagt dann, dass der Graph der Funktion $x \mapsto y(x)$ in jedem Punkt tangential zu diesem Richtungsfeld sein muss. Die Graphen aller Lösungen bilden in der Regel eine von einem reellen Parameter abhängige *Kurvenschar*, welche die Menge U überdeckt.

Bemerkung: Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung besitzt in der Regel eine von n reellen Parametern abhängige Familie von Lösungen. Eine eindeutige Lösung auszusondern erfordert daher in der Regel noch n zusätzliche *Nebenbedingungen.*

Definition: Eine Differentialgleichung zusammen mit den Nebenbedingungen

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad \text{für alle } 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

für einen gegebenen Punkt $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in U$ heisst ein *Anfangswertproblem.*

Definition: Eine Differentialgleichung für eine Funktion $y\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ zusammen mit Nebenbedingungen der Form $y^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}$ für gewisse (k, i) heisst ein *Randwertproblem.*

Beispiel: Die Bestimmung der Flugbahn eines Basketballs mit gegebener Anfangsrichtung und -geschwindigkeit ist ein Anfangswertproblem. Die Bestimmung der Anfangsrichtung und -geschwindigkeit, so dass der Ball im Korb landet, ist ein Randwertproblem.

8.2 Existenz und Eindeutigkeit

Definition: Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ für $X \subset \mathbb{R}^n$ heisst *(global) Lipschitz-stetig*, falls gilt:

$$\exists\, c > 0\ \forall\, x, x' \in X\colon\ |f(x) - f(x')| \leqslant c \cdot |x - x_0|.$$

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heisst *lokal Lipschitz-stetig*, falls X durch offene Mengen X' überdeckt werden kann, so dass die Einschränkung $f|X'$ Lipschitz-stetig ist.

Fakt: (a) Alle Grundrechenarten definieren lokal Lipschitz-stetige Funktionen.

(b) Jede differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung ist lokal Lipschitz-stetig.

(c) Jede Komposition lokal Lipschitz-stetiger Funktionen ist lokal Lipschitz-stetig.

(d) Eine vektorwertige Funktion ist lokal Lipschitz-stetig genau dann, wenn ihre Komponentenfunktionen es sind.

Beispiel: Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist global Lipschitz-stetig.

Beispiel: Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist lokal, aber nicht global Lipschitz-stetig.

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Teilmenge und $F\colon U \to \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, und sei $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in U$ ein Anfangswert.

(a) Das zugehörige Anfangwertproblem besitzt eine auf einem offenen Intervall $]x_1, x_2[$ mit $x_0 \in\,]x_1, x_2[$ definierte Lösung.

(b) Je zwei auf solchen Intervallen $]x_1, x_2[$ bzw. $]x_1', x_2'[$ definierte Lösungen stimmen auf dem Durchschnitt der Intervalle überein.

(c) Es existiert eine eindeutige *maximale Lösung*, das heisst, eine mit maximalem Definitionsintervall $]x_1, x_2[$.

(d) Der Graph der maximalen Lösung verlässt jede kompakte Teilmenge $K \subset U$, das heisst, es existiert ein kompaktes Teilintervall $[x_1', x_2'] \subset\,]x_1, x_2[$, so dass gilt

$$\forall\, x \in\,]x_1, x_2[\smallsetminus [x_1', x_2']\colon\ (x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \notin K.$$

Bemerkung: Die Aussage (d) bedeutet anschaulich, dass der Graph der maximalen Lösung in beide Richtungen entweder auf den Rand von U hin oder ins Unendliche weg läuft.

Anwendung: Nehmen wir an, wir haben gewisse Lösungen gefunden, sei es durch Raten oder mit einer der im folgenden besprochenen Lösungsmethoden oder sonst irgendwie. Wenn dann die Graphen dieser Lösungen die gesamte Menge U überdecken und die Bedingungen des Satzes erfüllt sind, so bilden diese Lösungen aufgrund der Eindeutigkeit schon alle Lösungen.

Die resultierende Formel für die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung hängt dann in der Regel von n noch zu bestimmenden Konstanten ab. Diese findet man durch Einsetzen der Formel in die gegebenen Nebenbedingungen und Lösen des resultierenden Gleichungssystems.

Für einfache Differentialgleichungen kann man oft gewisse Lösungen erraten.

Beispiel: Das Richtungsfeld der auf $U := (\mathbb{R}^{>0})^2$ definierten Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ zeigt in jedem Punkt geradeaus vom Ursprung weg. Als Lösungskurven können wir somit die Geraden $y = ax$ erraten für alle $a > 0$. Da die Funktionen $x \mapsto ax$ tatsächlich die Differentialgleichung erfüllen und ihre Graphen ganz U überdecken, und die Funktion $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ lokal Lipschitz-stetig ist, sind dies alle Lösungen.

Konstruktion: Das zu einem Richtungsfeld $(x, y) \mapsto F(x, y)$ orthogonale Richtungsfeld ist gegeben durch $(x, y) \mapsto -\frac{1}{F(x,y)}$ überall wo $F(x, y) \neq 0$ ist. Dessen Lösungskurven heissen *Orthogonaltrajektorien* zu den Lösungskurven des ursprünglichen Richtungsfelds.

Beispiel: Das zu dem vorigen Beispiel orthogonale Richtungsfeld ist gegeben durch die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$. Als Lösungskurven erraten wir die Viertelkreise $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ für alle $r > 0$. Aus denselben Gründen wie vorher sind dies alle Lösungen.

Beispiel: Betrachte die auf $U := \mathbb{R}^2$ definierte Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = y^2$. Um Lösungen zu erraten, nehmen wir an, dass eine irgendwo definierte lokale Lösung $x \mapsto y(x)$ eine invertierbare Funktion mit $y(x) \neq 0$ ist. Die Umkehrfunktion $y \mapsto x(y)$ erfüllt dann die Differentialgleichung $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$. Nach dem Hauptsatz sind deren Lösungen gleich $\int y^{-2}\, dy = c - y^{-1}$ für alle Konstanten c. Auflösen der Gleichung $x = c - y^{-1}$ nach y liefert $y = \frac{1}{c-x}$. Durch Nachrechnen verifizieren wir, dass die Funktionen $x \mapsto \frac{1}{c-x}$ für $x \neq c$ tatsächlich Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind. Konkret geht durch jeden Punkt (x_0, y_0) mit $y_0 \neq 0$ die Lösungskurve $y = \frac{y_0}{1-y_0(x-x_0)}$. Schliesslich hat das Anfangswertproblem im Fall $y_0 = 0$ die triviale Lösung $y = 0$. Da die Funktion $(x, y) \mapsto y^2$ überall lokal Lipschitz-stetig ist, sind damit alle Lösungen gefunden. Das maximale Existenzintervall der Lösung durch (x_0, y_0) ist

$$\begin{cases}]-\infty, x_0 + \frac{1}{y_0}[& \text{für } y_0 > 0, \\ ]-\infty, \infty[& \text{für } y_0 = 0, \\ ]x_0 + \frac{1}{y_0}, \infty[& \text{für } y_0 < 0. \end{cases}$$

Beispiel: Betrachte die auf $U := \mathbb{R}^2$ definierte Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 3|y|^{2/3}$. Mit derselben Methode wie im vorigen Beispiel errät man die Lösungen $y = (x - c)^3$ und $y = 0$. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert die lokale Eindeutigkeit der Lösung aber nur für $y \neq 0$, weil die Funktion $(x, y) \mapsto 3|y|^{2/3}$ nur dort lokal Lipschitz-stetig ist.

Tatsächlich ist für beliebige $c_1 \leqslant c_2$ einschliesslich $c_1 = -\infty$ und/oder $c_2 = \infty$ die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} (x-c_1)^3 & \text{für } x \leqslant c_1, \\ 0 & \text{für } c_1 < x < c_2, \\ (x-c_2)^3 & \text{für } x \geqslant c_2, \end{cases}$$

eine Lösung. Für jeden Anfangswert (x_0, y_0) hat das Anfangswertproblem also eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung, aber im allgemeinen keine eindeutige.

8.3 Potenzreihenlösungen

Sind die in einer Differentialgleichung vorkommenden Funktionen in Potenzreihen entwickelbar, so kann man hoffen, dass auch die Lösungen in Potenzreihen entwickelbar sind. Solche Lösungen kann man manchmal finden durch Ansatz und Koeffizientenvergleich.

Beispiel: Gewisse partielle Differentialgleichungen kann man zurückführen auf eine sogenannte *Besselsche* Differentialgleichung der Form

$$f''(x) + \tfrac{1}{x} \cdot f'(x) + (1 - \tfrac{n^2}{x^2}) \cdot f(x) \;=\; 0$$

für eine ganze Zahl $n \geqslant 0$. Wir suchen alle in der Nähe von $x = 0$ definierten Lösungen der Form $f(x) = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$ für noch zu bestimmende Koeffizienten a_k. Mit $a_{-1} := a_{-2} := 0$ wird die Differentialgleichung äquivalent zu $\sum_{k \geqslant 0}(a_{k-2} - a_k(n^2 - k^2))x^k = 0$, nach dem Potenzreihenidentitätssatz also zu

$$a_{k-2} \;=\; a_k(n^2 - k^2) \quad \text{für alle } k \geqslant 0.$$

Die einzigen Lösungen dieser Rekursionsformel sind gegeben durch

$$a_{n+2\ell} \;=\; \frac{(-1)^\ell \, n!}{4^\ell \, \ell! \, (n+\ell)!} \cdot a_n$$

für alle $\ell \geqslant 0$ und allen übrigen $a_k = 0$. Betrachte also die Potenzreihe

$$J_n(x) \;:=\; \sum_{\ell \geqslant 0} \frac{(-1)^\ell}{4^\ell \, \ell! \, (n+\ell)!} \cdot x^{n+2\ell}.$$

Da deren Koeffizienten schneller gegen Null gehen als die Koeffizienten der Exponentialfunktion, hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞. Somit ist sie tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung, und die allgemeine Potenzreihenlösung hat die Gestalt $f(x) = c \cdot J_n(x)$ für eine beliebige Konstante c. Die Funktion J_n heisst die *n-te Besselfunktion erster Gattung.* (Vorsicht: Die Differentialgleichung besitzt noch weitere Lösungen, die sich nicht als Potenzreihen in x darstellen lassen.)

8.4 Separierbare Differentialgleichungen

Definition: Eine *separierbare* Differentialgleichung ist eine der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y).$$

Diese hat einerseits die konstanten Lösungen $y = y_0$ für alle y_0 mit $g(y_0) = 0$. Andererseits gilt für eine nichtkonstante Lösung zumindest teilweise $y' \neq 0$ und somit $g(y) \neq 0$. Dort können wir die Variablen separieren durch die formale Umformung

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Für jede Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, und jede invertierbare Stammfunktion $H(y)$ von $\frac{1}{g(y)}$ und jede Konstante c ist also $x \mapsto H^{-1}(F(x) + c)$, wo definiert, eine Lösung. Das maximale Definitionsintervall findet man in der Regel am besten am Ende anhand der gefundenen Lösungsformel.

Beispiel: Die Beispiele $y' = \frac{y}{x}$ und $y' = -\frac{x}{y}$ und $y' = y^2$ und $y' = 3|y|^{2/3}$ aus Abschnitt 8.2 sind alle separierbar und lassen sich mit dieser Methode systematisch lösen.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$ ist separierbar. Da die rechte Seite überall $\neq 0$ ist, ist jede Lösung lokal invertierbar. Wir finden sie durch die Rechnung

$$\arctan y \;=\; \int \frac{dy}{1+y^2} \;=\; \int dx \;=\; x + c \quad \Longleftrightarrow \quad y = \tan(x + c)$$

für eine Konstante c. Ihr maximales Definitionsintervall ist $\left]c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}\right[$.

Beispiel: Die für $|x|, |y| < 1$ definierte Differentialgleichung $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ ist separierbar. Sie hat keine konstanten Lösungen. Ihre nichtkonstanten Lösungen berechnen sich durch

$$\arcsin y \;=\; \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \;=\; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \arcsin x + c$$

$$\Longrightarrow \qquad y \;=\; \sin(\arcsin x + c) \;=\; x \cdot \cos c \pm \sqrt{1-x^2} \cdot \sin c \;=\; ax + b\sqrt{1-x^2}$$

für gewisse Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Rückeinsetzen in die Differentialgleichung liefert die Zusatzbedingung $y' = a - \frac{bx}{\sqrt{1-x^2}} > 0$. Das maximale Definitionsintervall ist hier stets $]-1, 1[$.

Variante: Manchmal kann man eine Differentialgleichung durch Substitution separierbar machen. Speziell wird eine Differentialgleichung der Form $y' = f(\frac{y}{x})$ durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ äquivalent zu

$$u' \;=\; \left(\frac{y}{x}\right)' \;=\; \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} \;=\; \frac{f(u)}{x} - \frac{u}{x} \;=\; \frac{f(u) - u}{x}.$$

Beispiel: Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ für $x \neq 0$ wird durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{arsinh} u = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + c \\ &\Longleftrightarrow \quad u = \sinh(\log px) = \frac{p^2x^2-1}{2px} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{p^2x^2-1}{2p} \end{aligned}$$

für eine Konstante $p = \pm e^c \neq 0$.

Beispiel: Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{x+qy}{qx-y}$ wird durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{q-u} \cdot \frac{1}{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad q \cdot \arctan u - \frac{1}{2} \cdot \log(1+u^2) = \int \frac{q-u}{1+u^2}\, du = \int \frac{dx}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad q \cdot \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \cdot \log \frac{x^2+y^2}{x^2} = \log|x| + c \\ &\Longleftrightarrow \quad q \cdot \arctan \frac{y}{x} = c + \log\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man zwar nicht elementar nach y auflösen, gibt aber die Lösungen als implizite Funktionen an. In Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ wird sie zu

$$q\varphi = c + \log r \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = r_0 \cdot e^{q\varphi}$$

für eine Konstante $r_0 > 0$. Die Lösungskurven sind also logarithmische Spiralen.

8.5 Lineare Differentialgleichungen

Definition: Ein *linearer Differentialoperator L der Ordnung n* auf einem Intervall I ist ein Ausdruck der Form

$$L := a_0(x)\tfrac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\tfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\tfrac{d}{dx} + a_n(x)$$

für gegebene Funktionen $a_0, \ldots, a_n$ auf I. Der Operator ordnet jeder n-mal differenzierbaren Funktion y auf I die folgende Funktion auf I zu:

$$x \mapsto Ly(x) := a_0(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y(x).$$

Definition: Eine *lineare Differentialgleichung* ist eine der Form

$$Ly(x) = b(x).$$

Ist $b(x)$ identisch Null, so heisst die Differentialgleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Fakt: Für je zwei auf I definierte Lösungen y_1 und y_2 der homogenen Gleichung $Ly = 0$ und je zwei Konstanten λ_1 und λ_2 ist auch $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ eine Lösung von $Ly = 0$. Die auf I definierten Lösungen der homogenen Gleichung bilden also einen Vektorraum. Die Elemente einer gewählten Basis dieses Vektorraums heissen *Fundamentallösungen*. Die *allgemeine Lösung* ist dann eine Linearkombination der Fundamentallösungen mit noch zu bestimmenden konstanten Koeffizienten.

Fakt: Für jede auf I definierte Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $Ly = b$ und jede auf I definierte n-mal differenzierbare Funktion y_h ist $y_p + y_h$ eine Lösung von $Ly = b$ genau dann, wenn y_h eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $Ly = 0$ ist.

Folge: Die *allgemeine Lösung* einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $Ly = b$ findet man, indem man die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung $Ly = 0$ zu einer beliebig gewählten *partikulären Lösung* y_p der inhomogenen Gleichung addiert.

Fakt: Ist y_j eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Ly = b_j$ für jedes j, so ist $y_1 + \ldots + y_r$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Ly = b_1 + \ldots + b_r$.

Satz: Sei $a_0(x)$ identisch gleich 1, und seien die Funktionen $a_1, \ldots, a_n, b$ stetig. Dann gilt:

(a) Für jeden Anfangswert besitzt $Ly = b$ eine eindeutige auf ganz I definierte Lösung.

(b) Die auf I definierten Lösungen von $Ly = 0$ bilden einen Vektorraum der Dimension n.

Spezialfall: Betrachte eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y' = p(x) \cdot y + q(x).$$

Die zugehörige homogene Gleichung $y' = \frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y$ ist separierbar. Eine Lösung findet man durch die Rechnung

$$\frac{dy}{y} = p(x)\,dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log y = \int \frac{dy}{y} = \int p(x)\,dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = e^{\int p(x)\,dx}.$$

Da diese Lösung überall definiert und $\neq 0$ ist, ist sie nach dem obigen Satz Basis des eindimensionalen Lösungsraums, also eine Fundamentallösung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit $y(x) = \lambda \cdot e^{P(x)}$ für eine fest gewählte Stammfunktion $P(x) = \int p(x)\,dx$ und eine noch zu bestimmende Konstante λ.

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung findet man durch *Variation der Konstanten*, das heisst, durch den Ansatz $y(x) = \lambda(x) \cdot e^{P(x)}$ für eine noch zu bestimmende Funktion $x \mapsto \lambda(x)$. Nach Einsetzen und Ausrechnen wird die inhomogene Gleichung äquivalent zu $\lambda'(x) = q(x) \cdot e^{-P(x)}$. Integrieren und Rückeinsetzen liefert dann die Lösung

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot \int q(x)\, e^{-P(x)}\,dx.$$

Für jede Wahl der Stammfunktion $\int q(x)\, e^{-P(x)}\, dx$ ist dies eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(x) \;=\; e^{P(x)} \cdot \int q(x)\, e^{-P(x)}\, dx \;+\; \lambda \cdot e^{P(x)}$$

für eine noch zu bestimmende Konstante λ.

Beispiel: Die auf $\mathbb{R}$ definierte lineare Differentialgleichung $y' = x^3 - xy$ hat die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' = -xy$ mit der Lösung $e^{\int(-x)\,dx} = e^{-x^2/2+c}$. Also ist $e^{-x^2/2}$ eine Fundamentallösung der homogenen Gleichung. Die inhomogene Gleichung hat daher die Lösung $y(x) = e^{-x^2/2} \cdot \int x^3\, e^{x^2/2}\, dx$. Mittels partieller Integration berechnet man $\int x^3\, e^{x^2/2}\, dx = (x^2-2) \cdot e^{x^2/2} + c$ und erhält somit die partikuläre Lösung $y(x) = x^2 - 2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung hat also die Form

$$y(x) \;=\; x^2 - 2 + \lambda \cdot e^{-x^2/2}$$

für eine noch zu bestimmende Konstante λ.

Beispiel: Die für $x > 0$ definierte lineare Differentialgleichung $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$ hat die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' + \frac{y}{x} = 0$ mit der Lösung $e^{\int \frac{-dx}{x}} = e^{-\log x + c} = \frac{1}{x} \cdot e^c$. Also ist $\frac{1}{x}$ eine Fundamentallösung der homogenen Gleichung. Die inhomogene Gleichung hat daher die allgemeine Lösung

$$y(x) \;=\; \frac{1}{x} \cdot \int \sqrt{x} \cdot x\, dx \;=\; \frac{1}{x} \cdot \int x^{3/2}\, dx \;=\; \tfrac{1}{x} \cdot \left(\tfrac{x^{5/2}}{5/2} + c\right) \;=\; \tfrac{2}{5} \cdot x^{3/2} + c \cdot x^{-1}$$

für eine noch zu bestimmende Konstante c.