Musterlösung 10

1. Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine stetige Funktion f das uneigentliche Integral $\int_X f\,d\mathrm{vol}$ genau dann existiert, wenn $\int_K |f|\,d\mathrm{vol}$ für alle kompakten Mengen $K \subset X$ nach oben beschränkt ist. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\int_X \left| \frac{x-P}{|x-P|^3} \right| d\mathrm{vol}(x) = \int_X \frac{1}{|x|^2}\, d\mathrm{vol}(x) < \infty$$

ist. Wir verwenden Kugelkoordinaten mit $x = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$. Dann ist $\frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{r^2}$. Wir rechnen

$$\int_X \frac{1}{|x|^2}\, d\mathrm{vol}(x) = \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr = \int_0^R 4\pi\, dr = 4\pi R < \infty.$$

Daher existiert das uneigentliche Integral $\int_X f\,d\mathrm{vol}$. Aus Symmetriegründen ist sein Wert $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weil die Anziehungskraft von X auf P bis auf Konstanten dem Wert des Integrals entspricht, verschwindet sie. Würde das Integral nicht existieren oder wäre es nicht endlich, so könnten wir Körper, die ja aus Punktmassen bestehen (Elementarteilchen), nicht als kontinuierliche Massenverteilungen modellieren.

2. **a)** Wir beschreiben die Position des Flugzeugs in den üblichen Kugelkoordination mit $x = r\cos\vartheta\cos\varphi$ und $y = r\cos\vartheta\sin\varphi$ und $z = r\sin\vartheta$. Die Erde sehen wir vereinfacht als Kugel vom Radius 6371 km an. Wir nehmen weiterhin an, dass das Flugzeug in konstanter Höhe von 10 km (in etwa die Reiseflughöhe üblicher Verkehrsflugzeuge) fliegt. Dann ist r konstant 6381 km und die Position des Flugzeugs ist durch die geographische Länge φ und die geographische Breite ϑ bestimmt. Das Flugzeug startet in Zürich auf $\vartheta_0 = 47°22'$ nördlicher Breite. Wir werden gleich sehen, dass wir die geographische Länge von Zürich nicht benötigen (dies kann man auch aus Symmetriegründen einsehen).

Wir klären zunächst, was es heisst, in Richtung Nordosten zu fliegen. Die Nordrichtung in einem Punkt ist bestimmt durch den Tangentialvektor an jenem Längengrad, der durch diesen Punkt läuft und nach Norden zeigt. Nordosten ist also in Richtung jenes Vektors in der Tangentialebene, der zur Nordrichtung um den Winkel $45°$ in Richtung Osten gedreht ist.

Nehmen wir an, das Flugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit $c > 0$ auf der Route $C \subset \mathbb{R}^3$. Für die Berechnung der Länge von C ist diese Annahme keine Einschränkung, da die Weglänge unabhängig von der Parametrisierung des Weges ist. Die orthogonale Projektion des Geschwindigkeitsvektors auf die Nordrichtung hat dann die konstante Länge $c \cdot \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}c$. Aus der Formel für die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Kreisbewegung folgt, dass ϑ die Differentialgleichung

$$\dot{\vartheta} = \frac{c}{\sqrt{2}\,r} > 0$$

erfüllt. Die geographische Breite ϑ ist also eine lineare Funktion der Zeit und wächst streng monoton. Der Nordpol wird deshalb in endlicher Zeit erreicht. Sei $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Flugroute mit Geschwindigkeit c. Dabei befinde sich das Flugzeug zur Zeit $t = 0$ in Zürich und zur Zeit $t = T$ am Nordpol. Die Länge der Route ist dann

$$\mathrm{vol}_1(C) := \int_0^T |\dot{\gamma}|\, dt = \int_0^T c\, dt = \sqrt{2} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}} c\, dt.$$

Wie wir oben argumentiert haben, ist jedoch das letzte Integral die Länge der Flugroute von Zürich zum Nordpol entlang des Längengrads durch Zürich. Diese ist einfach die Länge eines Bogensegments vom Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$ auf der Sphäre mit Radius r. Es folgt, dass

$$\mathrm{vol}_1(C) = \sqrt{2}\, r \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0\right)$$

ist. Diese Länge beträgt etwa 6715 km.

b) Wir können die Kurve explizit berechnen. In Teil (a) haben wir gezeigt, dass falls das Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit fliegt, die Funktion ϑ linear ist und streng monoton wächst. Daher können wir die Flugroute nach ϑ parametrisieren durch die Funktion

$$\gamma\colon [\vartheta_0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3, \quad \vartheta \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi(\vartheta) \\ r\cos\vartheta\sin\varphi(\vartheta) \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor von γ ist

$$\begin{aligned} \gamma'(\vartheta) &= \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\cos\varphi(\vartheta) \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi(\vartheta) \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\varphi'(\vartheta)\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\varphi'(\vartheta)\cos\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi(\vartheta) \\ -\sin\vartheta\sin\varphi(\vartheta) \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} + r\varphi'(\vartheta)\cos\vartheta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$e_1 := \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi(\vartheta) \\ -\sin\vartheta\sin\varphi(\vartheta) \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor e_1 zeigt nach Norden. Denn der Längengrad durch den Punkt $\gamma(\vartheta)$ kann parametrisiert werden durch

$$\gamma_l\colon t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta + t)\sin\varphi(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta + t)\cos\varphi(\vartheta) \\ r\sin(\vartheta + t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\gamma_l(0) = \gamma(\vartheta)$ und die Tangente an γ_l in diesem Punkt ist

$$\gamma_l'(0) = r\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi(\vartheta) \\ -\sin\vartheta\cos\varphi(\vartheta) \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = re_1.$$

Weiterhin kann man ausrechnen, dass e_1 und e_2 orthonormale Vektoren sind. Da der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(\vartheta)$ mit der Nordrichtung e_1 den Winkel $45°$ bilden soll, muss also für $\varphi(\vartheta)$ die Differentialgleichung

$$r = r\frac{d\varphi}{d\vartheta}\cos\vartheta$$

gelten. Separation ergibt

$$\varphi = \int \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir lösen das Integral mit der Substitution $s := \sin\vartheta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\varphi(\vartheta) &= \int \frac{1}{\cos\vartheta}\,d\vartheta = \int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \\
&= \int \frac{1}{1-s^2}\,ds \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right)\,ds \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|1+s| - \log|1-s|\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+s}{1-s}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right| + C.
\end{aligned}$$

Daraus lesen wir ab, dass

$$\lim_{\vartheta\to\frac{\pi}{2}} \varphi(\vartheta) = +\infty$$

ist. Das Flugzeug stürzt folglich ab, weil es eine immer engere Kurve um den Nordpol zieht.

Aliter (Skizze): Solange das Flugzeug nicht abstürzt, ist seine Route eine reguläre Kurve mit wohldefinierter Tangente. Wenn dies auch am Nordpol der Fall ist, so entspricht die dortige Tangente einem Längengrad, den die Flugroute tangential berührt. Bevor man den Nordpol erreicht, ist jedoch der Winkel der Tangente in einem Punkt durch den durch ihn führenden Längengrad konstant $45°$. Also kann die Route im Nordpol keine reguläre Kurve sein.

Für eine (zugegeben etwas freie) Darstellung solcher Flugrouten siehe

`http://www.mcescher.com/gallery/mathematical/sphere-surface-with-fish/`

3. **a)** Die Bogenlänge ist das Integral

$$\ell := \int_0^{+\infty} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \\
y'(t) &= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t,
\end{aligned}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}
x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}(\sin t - \cos t)^2 \\
&= e^{-2t}\cdot(\cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t\sin t + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t\sin t) \\
&= e^{-2t}\cdot 2
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\ell = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = -\sqrt{2}\cdot e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\,.$$

Bitte wenden!

b) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\ \mathrm{d}t \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\ \mathrm{d}t \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\ \mathrm{d}t \ = \ a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\ \mathrm{d}t \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\ \mathrm{d}t \ = \ -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= -4a\cdot(-1) + 4a\cdot 1 \\
&= 8a\,.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\sin\frac{t}{2} \geq 0$ ist für alle $t \in [0, 2\pi]$.