Musterlösung 11

1. Wir parametrisieren den Torus durch

$$f\colon [0,2\pi[\,\times\,[0,2\pi[\,\twoheadrightarrow T\subset\mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}(R+r\cos\psi)\cos\varphi\\ (R+r\cos\psi)\sin\varphi\\ r\sin\psi\end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen von f nach φ und ψ sind

$$f_\psi=\begin{pmatrix}-r\sin\psi\cos\varphi\\ -r\sin\psi\sin\varphi\\ r\cos\psi\end{pmatrix},\quad f_\varphi=\begin{pmatrix}-(R+r\cos\psi)\sin\varphi\\ (R+r\cos\psi)\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$f_\psi\times f_\varphi=\begin{pmatrix}-r(R+r\cos\psi)\cos\psi\cos\varphi\\ -r(R+r\cos\psi)\cos\psi\sin\varphi\\ -r(R+r\cos\psi)\sin\psi\end{pmatrix}$$

und es ist

$$\begin{aligned}|f_\psi\times f_\varphi| &= r(R+r\cos\psi)\sqrt{\cos^2\psi\cos^2\varphi+\cos^2\psi\sin^2\varphi+\sin^2\psi}\\ &= r(R+r\cos\psi)\sqrt{\cos^2\psi+\sin^2\psi}=r(R+r\cos\psi).\end{aligned}$$

Dies setzen wir in die Formel für den Flächeninhalt ein und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(T) &:= \int_T 1\,d\mathrm{vol}\,2=\int_{[0,2\pi[\times[0,2\pi[}|f_\psi\times f_\varphi|\;d\mathrm{vol}_2\left(\begin{smallmatrix}\psi\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_\psi\times f_\varphi|\;d\psi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}r(R+r\cos\psi)\;d\varphi\,d\psi\\ &=2\pi\int_0^{2\pi}r(R+r\cos\psi)\;d\psi=2\pi r(R\psi+r\sin\psi)\Big|_{\psi=0}^{\psi=2\pi}\\ &=4\pi^2rR\,.\end{aligned}$$

2. Die Feldlinien γ zu einem Vektorfeld V sind charakterisiert durch die Differentialgleichung $\gamma'=V(\gamma)$. Das gesuchte Vektorfeld $V\;:\;\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ muss also für alle $t,r,\vartheta\in\mathbb{R}$ die Eigenschaft $\gamma'_{r,\vartheta}(t)=V(\gamma_{r,\vartheta}(t))$ erfüllen, d.h.

$$\begin{pmatrix}-r\sin t\\ r\cos t\\ 1\end{pmatrix}=\gamma'_{r,\vartheta}(t)\overset{!}{=}V(\gamma_{r,\vartheta}(t))=V\left(\begin{pmatrix}r\cos t\\ r\sin t\\ t-\vartheta\end{pmatrix}\right).$$

Dies wird gelöst durch das Vektorfeld

$$V\left(\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right):=\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 1\end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

3. **a)** Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^3 \\ x + 5y \end{pmatrix},$$

gilt $P_y = -6y^2 \neq -1 = Q_x$. Folglich besitzt $\mathbf{K}$ kein Potential.

b) Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 5 \\ 2xy - 8 \end{pmatrix},$$

gilt $P_y = 2y = 2y = Q_x$. Da der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ ein (unendlich ausgedehnter) Quader ist, besitzt $\mathbf{K}$ ein Potential.

Sei f ein Potential zu $\mathbf{K}$. Aus $f_x(x,y) = P(x,y) = y^2 + 5$ folgt dann mit dem unbestimmten Integral

$$f(x,y) \;=\; \int (y^2+5)\,dx \;=\; (y^2+5)x + g(y) \;=\; xy^2 + 5x + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ noch von y abhängen darf! Ableiten dieser Gleichung nach y liefert

$$f_y(x,y) = 2xy + g'(y).$$

Andererseits gilt

$$f_y(x,y) = Q(x,y) = 2xy - 8.$$

Also ist $g'(y) = -8$ und somit ist $g(y) = -8y + c$ für eine Konstante c. Somit ist

$$f(x,y) \;=\; xy^2 + 5x - 8y + c$$

ein Potential zu $\mathbf{K}$.

(*Bemerkung:* Da $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend ist, unterscheiden sich zwei beliebige Potentiale nur um eine konstante Funktion. Darum hat jedes Potential von $\mathbf{K}$ die genannte Gestalt.)

4. Das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (a+x)y^2\sin(z)e^x \\ bxy\sin(z)e^x \\ cxy^2\cos(z)e^x \end{pmatrix},$$

ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ ein (unendlich ausgedehnter) Quader ist, hat K genau dann ein Potential, wenn die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} R_y &= Q_z, \\ P_z &= R_x, \\ Q_x &= P_y. \end{aligned}$$

Nach Berechnen der partiellen Ableitungen erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} bxy\cos(z)e^x &= 2cxy\cos(z)e^x, \\ (a+x)y^2\cos(z)e^x &= cy^2\cos(z)e^x + cxy^2\cos(z)e^x, \\ by\sin(z)e^x + bxy\sin(z)e^x &= 2y(a+x)\sin(z)e^x. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir, dass die Konstanten a, b, c das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b &= 2c \\ a &= c \\ 1 &= c \\ b &= 2a \\ b &= 2 \end{aligned}$$

erfüllen müssen. Also ist $a = 1$ und $b = 2$ und $c = 1$.

Sei im Folgenden also

$$\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (1+x)y^2 \sin(z) e^x \\ 2xy \sin(z) e^x \\ xy^2 \cos(z) e^x \end{pmatrix}.$$

Sei f ein Potential zu $\mathbf{K}$. Aus $f_y(x,y,z) = Q(x,y,z) = 2xy \sin z\, e^x$ folgt dann

$$f(x,y,z) \;=\; \int 2xy \sin z\, e^x \, dy \;=\; xy^2 \sin z\, e^x + g(x,z),$$

wobei die Integrationskonstante $g(x,z)$ noch von x und z abhängen darf. Ableiten dieser Gleichung nach z liefert

$$f_z(x,y,z) = xy^2 \cos z\, e^x + g_z(x,z).$$

Andererseits gilt

$$f_z(x,y,z) = R(x,y,z) = xy^2 \cos z\, e^x,$$

woraus $g_z(x,z) = 0$ folgt. Daher hängt $g(x,z)$ von z nicht ab, das heisst, es ist $g(x,z) = h(x)$ für eine Funktion h. Schliesslich zeigt Ableiten nach x, dass

$$f_x(x,y,z) \;=\; \tfrac{\partial}{\partial x}\big(xy^2 \sin z\, e^x + h(x)\big) \;=\; (1+x)y^2 \sin z\, e^x + h'(x)$$

ist. Dies muss aber gleich $P(x,y,z) = (1+x)y^2 \sin z\, e^x$ sein. Somit folgt $h'(x) = 0$, also ist h konstant, und die Funktion

$$xy^2 \sin z\, e^x + C$$

ist für jede Konstante C ein Potential zu $\mathbf{K}$. Wie in Aufgabe 3b) hat jedes Potential von $\mathbf{K}$ die genannte Gestalt.