Musterlösung 13

1. Wir setzen voraus, dass

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} \text{ und } L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ sind, während $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wir kürzen ausserdem ab: $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$ und $\partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$ und $\partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$.

a) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fK) &= \partial_x(fK_1) + \partial_y(fK_2) + \partial_z(fK_3) \\
&= (\partial_x f)\cdot K_1 + f\cdot(\partial_x K_1) + (\partial_y f)\cdot K_2 + f\cdot(\partial_y K_2) + (\partial_z f)\cdot K_3 + f\cdot(\partial_z K_3) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} + f\cdot(\partial_x K_1 + \partial_y K_2 + \partial_z K_3) \\
&= \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div} K\,.
\end{aligned}$$

b) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(K\times L) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix} K_2L_3 - K_3L_2 \\ K_3L_1 - K_1L_3 \\ K_1L_2 - K_2L_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x(K_2L_3 - K_3L_2) + \partial_y(K_3L_1 - K_1L_3) + \partial_z(K_1L_2 - K_2L_1) \\
&= K_2\partial_x L_3 - K_3\partial_x L_2 + L_3\partial_x K_2 - L_2\partial_x K_3 + K_3\partial_y L_1 - K_1\partial_y L_3 \\
&\quad + L_1\partial_y K_3 - L_3\partial_y K_1 + K_1\partial_z L_2 - K_2\partial_z L_1 + L_2\partial_z K_1 - L_1\partial_z K_2 \\
&= -K_1(\partial_y L_3 - \partial_z L_2) + L_1(\partial_y K_3 - \partial_z K_2) - K_2(\partial_z L_1 - \partial_x L_3) \\
&\quad + L_2(\partial_z K_1 - \partial_x K_3) - K_3(\partial_x L_2 - \partial_y L_1) + L_3(\partial_x K_2 - \partial_y K_1) \\
&= -K\cdot \operatorname{rot} L + L \cdot \operatorname{rot} K \\
&= L\cdot \operatorname{rot} K - K\cdot \operatorname{rot} L\,.
\end{aligned}$$

c) Durch Anwenden der Definition der Rotation und des Gradienten sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y\partial_z f - \partial_z\partial_y f \\ \partial_z\partial_x f - \partial_x\partial_z f \\ \partial_x\partial_y f - \partial_y\partial_x f \end{pmatrix} = 0\,.$$

d) Durch Anwenden der Definitionen der Divergenz und der Rotation sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix}\partial_y K_3 - \partial_z K_2\\ \partial_z K_1 - \partial_x K_3\\ \partial_x K_2 - \partial_y K_1\end{pmatrix}\\ &= \partial_x\partial_y K_3 - \partial_x\partial_z K_2 + \partial_y\partial_z K_1 - \partial_y\partial_x K_3 + \partial_z\partial_x K_2 - \partial_z\partial_y K_1 = 0\,.\end{aligned}$$

e) Durch Anwenden der Resultate aus den Teilaufgaben a) und d) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f\cdot\operatorname{rot} K) \overset{\text{a)}}{=} \nabla f\cdot\operatorname{rot} K + f\cdot\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) \overset{\text{d)}}{=} \nabla f\cdot\operatorname{rot} K\,.$$

2. Wir berechnen zunächst den Gradienten

$$\nabla f = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

und erhalten damit

$$v\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}x + a_2 z - a_3 y\\ y + a_3 x - a_1 z\\ z + a_1 y - a_2 x\end{pmatrix}$$

a) $\operatorname{div} v\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1.$

b) Sei $B := \{x\in\mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$. Mit dem Satz von Gauss folgt

$$\int_{\partial B} v\cdot d\omega = \int_B \operatorname{div} v\; d\mathrm{vol}_3 \int_B 1\, d\mathrm{vol}_3 = \frac{4}{3}\pi.$$

c) $\operatorname{rot} v\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2a_1\\ 2a_2\\ 2a_3\end{pmatrix} = \frac{2}{3}a.$

d) Bezeichne B die Einheitsscheibe, deren Rand ∂B der Einheitskreis ist und die in der Normalebene zu a liegt. Für ihren Normalenvektor n gilt $n\cdot a = |a|$. Der Satz von Stokes liefert daher für die Zirkulation den Wert

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} v\cdot d\omega &= \int_B \operatorname{rot} v\cdot n\, d\mathrm{vol}_2\\ &= \int_B \tfrac{2}{3}a\cdot n\, d\mathrm{vol}_2\\ &= \frac{2}{3}\,|a|\int_B 1\, d\mathrm{vol}_2\\ &= \frac{2}{3}\,|a|\cdot\pi = \frac{2\pi}{3}\,|a|\,.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Variante 1 (direkte Rechnung): Wir parametrisieren B, analog zur Sphäre, durch

$$T\colon [0,2\pi[\,\times\left[\vartheta_0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix}\varphi\\ \vartheta\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}R\cos\vartheta\cos\varphi\\ R\cos\vartheta\sin\varphi\\ R\sin\vartheta\end{pmatrix},$$

wobei ϑ_0 den Winkel der "Abschneidehöhe" bezeichnet. Für diesen gilt

$$x^2+y^2=R^2\,\cos^2\vartheta_0\,\cos^2\varphi+R^2\,\cos^2\vartheta_0\,\sin^2\varphi=R^2\,\cos^2\vartheta_0=\frac{d^2}{4}$$

und es folgt

$$\cos^2\vartheta_0=\frac{d^2}{4R^2}\,.$$

Mit dieser Parametrisierung ist

$$T_\varphi\times T_\vartheta=\begin{pmatrix}-R\cos\vartheta\sin\varphi\\ R\cos\vartheta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-R\sin\vartheta\cos\varphi\\ -R\sin\vartheta\sin\varphi\\ R\cos\vartheta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R^2\cos^2\vartheta\cos\varphi\\ R^2\cos^2\vartheta\sin\varphi\\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

tatsächlich nach aussen orientiert, wie verlangt. Es ist

$$v=\operatorname{rot}F=\operatorname{rot}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\,.$$

Der Fluss des Vektorfeldes v durch die Oberfläche B des Ballons von innen nach aussen ist daher

$$\begin{aligned}\int_B v\cdot d\omega &= \int_{[0,2\pi[\times[\vartheta_0,\frac{\pi}{2}]}(v\circ T)\cdot(T_\varphi\times T_\vartheta)\;d\mathrm{vol}_2\\ &= \int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}2R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\\ &= 2\pi R^2\int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\\ &= 2\pi R^2\Big[-\cos^2\vartheta\Big]_{\vartheta=\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 2\pi R^2\cos^2\vartheta_0\;=\;2\pi R^2\cdot\frac{d^2}{4R^2}\;=\;\frac{\pi d^2}{2}.\end{aligned}$$

Variante 2 (Gauss): Sei D der kreisförmige "Deckel", der den Ballon verschliesst, und sei G das Innere der durch $B\cup D$ gebildeten geschlossenen Fläche. Der Gausssche Integralsatz besagt:

$$\int_B v\cdot d\omega+\int_D v\cdot d\omega=\int_{B\cup D}v\cdot d\omega=\int_G\operatorname{div}v\,d\mathrm{vol}_3=\int_G\operatorname{div}\,\operatorname{rot}F\,d\mathrm{vol}_3=0\,.$$

Um den Fluss durch den "Deckel" D zu berechnen, betrachten wir die Parametrisierung

$$T\colon [0,2\pi[\,\times\left[0,\frac{d}{2}\right]\to\mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix}\varphi\\ r\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\\ z_0\end{pmatrix},$$

wobei $z_0:=R\sin\vartheta_0$ die "Abschneidehöhe" bezeichnet. Wir berechnen

$$T_\varphi\times T_r=\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ -r\sin^2\varphi-r\cos^2\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-r\end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Dieser Vektor ist ebenfalls auf den Gesamtballon bezogen nach aussen gerichtet. Für den Fluss des Vektorfeldes v durch D erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\int_D v \cdot d\omega &= \int_{[0,2\pi[\times\left[0,\frac{d}{2}\right]} (v \circ T) \cdot (T_\varphi \times T_r)\ d\mathrm{vol}_2 \\
&= \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\varphi\, dr = \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} -2r\, d\varphi\, dr \\
&= -4\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r\, dr = -4\pi\ \frac{r^2}{2}\bigg|_{r=0}^{\frac{d}{2}} \\
&= \frac{-4\pi d^2}{8} = -\frac{\pi d^2}{2}.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Gauss ist der Fluss des Vektorfeldes v durch D *und* den Ballon B gleich 0. Folglich erhalten wir für den Fluss durch den Ballon

$$\int_B v \cdot d\omega = -\int_D v \cdot d\omega = \frac{\pi d^2}{2}.$$

4. Der Satz von Stokes besagt, dass

$$\int_{\partial S} V \cdot dx = \int_S \operatorname{rot} V \cdot n\, d\mathrm{vol}_2$$

ist. Wir berechnen zunächst die rechte Seite. Dafür parametrisieren wir S in Kugelkoordinaten durch

$$T\colon [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
T_\varphi \times T_\vartheta &= \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta\cos\varphi \\ \cos^2\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\vartheta\sin^2\varphi + \cos\vartheta\sin\vartheta\cos^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta\cos\varphi \\ \cos^2\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Rotation von V ist

$$\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} -2xy + 2yz \\ 0 - 0 \\ 0 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist die rechte Seite

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} V \cdot n\, d\mathrm{vol}_2 &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \operatorname{rot}(V \circ T) \cdot (T_\varphi \times T_\vartheta)\ d\mathrm{vol}_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta\cos\varphi \\ \cos^2\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir berechnen die linke Seite. Der Rand von S ist der Einheitskreis in der x-y-Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung. Wir parametrisieren ihn durch

$$\gamma\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir verifizieren, dass diese Parametrisierung die von T induzierte Orientierung trägt. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} V \cdot dx &= \int_0^{2\pi} V(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ -\sin t \cdot 0 \\ -\sin^2 t \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - 2\sin t \cos t)\, dt = \pi. \end{aligned}$$

Also gilt der Satz von Stokes in diesem Fall.

5. **a)** Wir parametrisieren den Randzyklus durch die drei Kurven

$$\gamma_1\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}, \quad \gamma_3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix},$$

jeweils für $t \in [0, 1]$. Wegen der im Hinweis erwähnten Symmetrie gilt

$$\int_\gamma K \cdot dr = \sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_k} K \cdot dx = 3 \int_{\gamma_1} K \cdot dx.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_\gamma K \cdot dx &= 3 \int_{\gamma_1} K \cdot dx = 3 \int_0^1 K(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\, dt \\ &= 3 \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t-t \\ t+1-t \\ -1+t+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 3 \int_0^1 2t\, dt = 3. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen die Zirkulation mit dem Satz von Stokes:

$$\int_{\gamma = \partial D} K \cdot dx = \int_D \operatorname{rot} K \cdot d\omega = \int_D \operatorname{rot} K \cdot n\, d\mathrm{vol}_2,$$

wobei D das von γ berandete ebene Dreieck sei. Wir parametrisieren D durch

$$r\colon B \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u, v \in [0,1], 0 \le u + v \le 1 \right\}$$

ist. Es gilt

$$(\partial_u r \times \partial_v r) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Rotation von $K = (K_x, K_y, K_z)$ ist

$$\operatorname{rot} K = \begin{pmatrix} \partial_y K_z - \partial_z K_y \\ \partial_z K_x - \partial_x K_z \\ \partial_x K_y - \partial_y K_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Somit folgt

$$\int\limits_D \operatorname{rot} K \cdot d\omega = \int_B (K \circ r) \cdot (\partial_u r \times \partial_v r) \; d\mathrm{vol}_2 = \int\limits_B 6 \, d\mathrm{vol}_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-u} 6 \, dv \, du = 3.$$

Aliter: Nach Stokes gilt

$$\int\limits_\gamma K \cdot dx = \int\limits_D \operatorname{rot} K \cdot d\omega = \int_D \operatorname{rot} K \cdot n \, d\mathrm{vol}_2 \; .$$

Der äussere Einheitsnormalenvektor ist $n = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also gilt

$$\int\limits_D \operatorname{rot} K \cdot n \, d\mathrm{vol}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 \int\limits_D d\mathrm{vol}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 \, \mathrm{vol}_2(D) \, .$$

Es handelt sich bei D um ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\sqrt{2}$, also mit Höhe $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}$ und Fläche $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Daraus folgt

$$\int\limits_D \operatorname{rot} K \cdot n \, d\mathrm{vol}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \, .$$