Musterlösung 2

1. **a)** Die Lösung der homogenen Gleichung erhalten wir durch die folgende Rechnung:

$$y_h(x) = e^{\int(-x)\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}+c} = Ce^{\frac{-x^2}{2}},$$

mit $C = e^c$. Eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + x\,y = (x+1)\cdot e^x$$

erhalten wir durch Variation der Konstanten

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\int \frac{(x+1)\cdot e^x}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx\right).$$

Wir berechnen das Integral

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)\cdot e^x}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx &= \int (x+1)\cdot e^{\frac{x^2}{2}+x}\,dx = \int (x+1)\cdot e^{\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= e^{\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}} + C = e^{\frac{x^2}{2}+x} + C\end{aligned}$$

und erhalten die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(e^{\frac{x^2}{2}+x} + C\right) = e^x + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b) Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' + y/x = 0$ durch Separation der Variablen: Umstellen ergibt

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x},$$

und indem wir beide Seiten integrieren erhalten wir

$$\log|y(x)| = -\log|x| + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Durch Anwendung der Exponentialfunktion erhalten wir die allgemeine Lösung $y(x) = \pm e^c/x = C/x$ mit einer Konstanten $C = \pm e^c$. Wir rechnen nach, dass dies eine Lösung ist.

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmen wir durch Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log x}\int \cos x e^{\log x}\,dx \\ &= \frac{1}{x}\int x\cos x\,dx \\ &= \frac{\cos x + C}{x} + \sin x \end{aligned}$$

der inhomogenen Gleichung, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Für $C \neq -1$ ist y auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Für $C = -1$ können wir y in $x = 0$ stetig mit $y(0) = 0$ fortsetzen, denn

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}$$

und die Reihe hat den Wert 0 an der Stelle $x = 0$. Weiterhin ist sie eine überall konvergente Potenzreihe und somit unendlich oft differenzierbar. Wir rechnen leicht nach, dass sie auch die Differentialgleichung in $x = 0$ erfüllt.

2. **a)** Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 2\lambda - 35 = (\lambda + 7)(\lambda - 5)$$

mit den beiden verschiedenen Nullstellen $\lambda_1 = -7$ und $\lambda_2 = 5$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = Ae^{-7x} + Be^{5x}.$$

b) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^4 - 16 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$$

mit 4 verschiedenen Nullstellen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2i$ und $\lambda_4 = -2i$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + Ce^{2xi} + De^{-2xi}$$

oder

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + \tilde{C}\cos(2x) + \tilde{D}\sin(2x)$$

mit

$$\tilde{C} = (C + D)\ , \quad \tilde{D} = i\,(C - D)\ .$$

c) Das charakteristische Polynom

$$\frac{1}{4}\lambda^2 - 3\lambda + 9 = \frac{1}{4}(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = \frac{1}{4}(\lambda - 6)^2$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 6$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = Ae^{6x} + Bxe^{6x}.$$

d) Das charakteristische Polynom

$$9\lambda^4 - 16\lambda^2 = 9\lambda^2(\lambda^2 - \frac{16}{9}) = 9\lambda^2(\lambda - \frac{4}{3})(\lambda + \frac{4}{3})$$

hat eine doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = 0$ und einfache Nullstellen $\lambda_3 = \frac{4}{3}$ und $\lambda_4 = -\frac{4}{3}$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = A + Bx + Ce^{-\frac{4}{3}x} + De^{\frac{4}{3}x}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + 2y' - 35y = 0$ ist nach Aufgabe 2.a) gleich $y_h(x) = Ae^{-7x} + Be^{5x}$. Um eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems mit der rechten Seite e^{5x} zu finden machen wir daher den Ansatz

$$y_p(x) = Cxe^{5x}.$$

Das liefert

$$\begin{aligned} y_p' &= Ce^{5x} + 5Cxe^{5x}, \\ y_p'' &= 10Ce^{5x} + 25Cxe^{5x}. \end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $y'' + 2y' - 35y = e^{5x}$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} e^{5x} &= 10Ce^{5x} + 25Cxe^{5x} + 2Ce^{5x} + 10Cxe^{5x} - 35Cxe^{5x} \\ &= 12Ce^{5x} \end{aligned}$$

d.h. $C = \frac{1}{12}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-7x} + Be^{5x} + \frac{1}{12}xe^{5x}.$$

b) Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\frac{y''}{4} - 3y' + 9y = 0$ ist nach Aufgabe 2.c) gleich $y_h(x) = Ae^{6x} + Bxe^{6x}$. Da 0 kein Eigenwert ist, um eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems zu finden machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Cx^2 + Dx + E.$$

Das liefert

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Cx + D, \\ y_p'' &= 2C. \end{aligned}$$

Setzt man das in die Differentialgleichung $\frac{y''}{4} - 3y' + 9y = 9x^2$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 9x^2 &= \frac{C}{2} - 6Cx - 3D + 9Cx^2 + 9Dx + 9E \\ &= 9Cx^2 + (9D - 6C)x + (9E - 3D + \frac{C}{2}) \end{aligned}$$

d.h. durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 9C = 9 \quad &\Rightarrow \quad C = 1, \\ 9D - 6C = 0 \quad &\Rightarrow \quad D = \frac{6}{9}C = \frac{2}{3}, \\ 9E - 3D + \frac{C}{2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad E = \frac{1}{9}(3D - C/2) = \frac{1}{9}(2 - 1/2) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{6x} + Bxe^{6x} + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}.$$

4. In beiden Fällen ist die Funktion $x \mapsto U(x) - E$ stückweise konstant. Wir suchen also zunächst die allgemeine Lösung der DGl. auf jenen Intervallen, auf denen die Funktion konstant ist, mit noch zu bestimmenden Parametern. Das Übereinstimmen der Lösungen an den Sprungstellen bedeutet dann gemeinsame Randbedingungen, die linearen Gleichungen zwischen den Parametern entsprechen. Durch Lösen dieser Gleichungen finden wir die gesuchte Antwort.

Auf den einzelnen Intervallen unterscheiden wir drei Fälle:

Bitte wenden!

- $U = 0 < E$.
  Die Differentialgleichung ist
  $$y'' = -Ey\ .$$
  Deren allgemeine Lösung ist eine Schwingung mit
  $$y_h = A\cos\left(\sqrt{E}x\right) + B\sin\left(\sqrt{E}x\right)\ .$$
- $U = 1 < E$.
  Wir erhalten die Gleichung
  $$y'' = -\left(E-1\right)y$$
  mit $E - 1 > 0$. Die Lösung ist wieder eine Schwingung, aber mit anderer Frequenz:
  $$y_h = A\cos\left(\sqrt{E-1}\,x\right) + B\sin\left(\sqrt{E-1}\,x\right)\ .$$
- $U = 1 > E$.
  Es gilt
  $$y'' = \left(1-E\right)y$$
  mit $1 - E > 0$. Die allgemeine Lösung besteht aus exponentiellem Wachstum und Zerfall:
  $$y_h = Ae^{\sqrt{1-E}\,x} + Be^{-\sqrt{1-E}\,x}\ .$$

a)
- $E < 1$.
  Auf $]-\infty, 0[$ haben wir eine Schwingungslösung
  $$y_1(x) = A\cos\left(\sqrt{E}x\right) + B\sin\left(\sqrt{E}x\right)\ ,$$
  auf $[0, \infty[$ exponentielles Wachstum, bzw. Zerfall mit
  $$y_2 = Ce^{\sqrt{1-E}\,x} + De^{-\sqrt{1-E}\,x}\ .$$
  Wollen wir y_1 und y_2 in $x = 0$ stetig zusammensetzen, muss
  $$y_1(0) = A = C + D = y_2(0)\ .$$
  Weiterhin soll die Ableitung stetig in $x = 0$ sein, d.h.
  $$y_1'(0) = B\sqrt{E} = \sqrt{1-E}\,(C-D) = y_2'(0)\ .$$
  Die Lösung enthält also noch zwei freie Parameter.
- $E > 1$. Beide Lösungen sind Schwingungslösungen. Auf $]-\infty, 0[$ haben wir
  $$y_1 = A\cos\left(\sqrt{E}x\right) + B\sin\left(\sqrt{E}x\right)\ ,$$
  auf $[0, \infty[$
  $$y_2 = C\cos\left(\sqrt{E-1}x\right) + D\sin\left(\sqrt{E-1}x\right)\ .$$
  Stetigkeit von y in $x = 0$ ergibt
  $$y_1(0) = A = C = y_2(0)\ .$$
  Stetigkeit der Ableitung wiederum ergibt
  $$y_1'(0) = B\sqrt{E} = D\sqrt{E-1} = y_2'(0)\ .$$
  Wieder haben wir zwei freie Parameter.

Siehe nächstes Blatt!

b) Ausserhalb von $[0,1]$ haben wir Schwingungslösungen. Auf $]-\infty,0]$ schreiben wir

$$y_1 = A\cos\left(\sqrt{E}x\right) + B\sin\left(\sqrt{E}x\right)$$

und auf $]1,\infty[$ schreiben wir

$$y_2 = C\cos\left(\sqrt{E}x\right) + D\sin\left(\sqrt{E}x\right) \ .$$

Für das Intervall $[0,1]$ wird die Differentialgleichung gelöst durch

$$y_3 = Ee^{\sqrt{1-E}x} + Fe^{-\sqrt{1-E}x} \ .$$

Zunächst ergibt Stetigkeit in $x=0$ die Bedingungen

$$y_1(0) = A = E + F = y_3(0)$$

und

$$y_1'(0) = B\sqrt{E} = \sqrt{1-E}\,(E-F) = y_3'(0) \ .$$

Die entsprechenden Bedingungen bei $x=1$ lauten

$$y_2(1) = \cos(\sqrt{E})A + \sin(\sqrt{E})B = Ee^{\sqrt{1-E}} + Fe^{-\sqrt{1-E}} = y_3(1)$$

und

$$\begin{aligned} y_2'(1) &= \sqrt{E}\left(\cos(\sqrt{E})B - \sin(\sqrt{E})A\right) \\ &= \sqrt{1-E}\left(Ee^{\sqrt{1-E}} - Fe^{-\sqrt{1-E}}\right) = y_3'(1) \ . \end{aligned}$$

Bemerkung: In der Quantenmechanik beschreibt diese Differentialgleichung (einen Teil der) Wellenfunktion eines Teilchens mit Energie E, das sich im Potential U aufhält. Den Absolutbetrag der Wellenfunktion kann man als Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretieren. In Teil a) sehen wir, dass selbst wenn die Energie des Teilchens kleiner ist als nötig wäre, um über den Sprung bei $x=0$ zu gelangen, die Wellenfunktion im *verbotenen* Bereich $x \geq 0$ nicht verschwindet. In Teil b) finden wir ein analoges Resultat. Man kann entsprechende Gleichungen für bewegte Teilchen modellieren (WKB-Approximation). Dann beschreibt b) den berühmten *Tunneleffekt*. Wer sich weiter informieren will:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Tunneleffekt#Tunneleffekt_am_Beispiel_des_Kastenpotentials`