Musterlösung 7

1. **a)** Für festes $r > 0$ und $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ parametrisiert f eine Sphäre vom Radius r. Das erkennen wir wie folgt: Sei der Punkt $\xi = \left(\begin{smallmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Dann ist die Länge $|f(\xi)| = r$. Ausserdem läuft $r \sin\vartheta$ für $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ von $-r$ bis r. Dadurch erhalten wir alle möglichen Werte für z auf der Sphäre mit Radius r. Für ein solches $z \in [-r, r]$ erhalten wir alle möglichen Werte für x und y durch Variieren von φ.

b)

$$f\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\nabla f\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

c) Entwickeln nach der letzten Zeile gibt die Determinante

$$\begin{aligned} \det\nabla f\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} &= \sin\vartheta \cdot \begin{vmatrix} -r\sin\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &\quad -r\cos\vartheta \cdot \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= \sin\vartheta\, r^2\cos\vartheta\sin\vartheta\,(-\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ &\quad -r\cos\vartheta\, r\cos^2\vartheta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= -r^2\cos\vartheta(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) \\ &= -r^2\cos\vartheta\,. \end{aligned}$$

d) f ist lokal invertierbar, wenn $\det\nabla f \neq 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $r^2\cos\vartheta \neq 0$ ist, d.h., wenn gilt

$$r \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \vartheta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\,.$$

Da

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unabhängig von ϑ und φ ist, ist f dort nicht lokal invertierbar. Dasselbe gilt für die Punkte, an denen $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ist, denn

$$f\begin{pmatrix} r \\ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cr \end{pmatrix}$$

ist unabhängig von φ.

2. **a)** Sei

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \right\}.$$

Die Gerade durch einen Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \setminus Z$ und durch N wird parametrisiert durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sei $\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ der Schnittpunkt der Geraden mit der x-y-Ebene. Lösen des entsprechenden Gleichungssystems führt auf die Werte

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z}.$$

Wir erhalten die Funktion

$$g \colon \mathbb{R}^3 \setminus Z \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{1-z} \\ \frac{y}{1-z} \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktionalmatrix von g ist

$$\nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 & \frac{x}{(1-z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-z} & \frac{y}{(1-z)^2} \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla (g \circ f) \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-r\sin\vartheta} & 0 & \frac{r\cos\vartheta\cos\varphi}{(1-r\sin\vartheta)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-r\sin\vartheta} & \frac{r\cos\vartheta\sin\varphi}{(1-r\sin\vartheta)^2} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-r\sin\vartheta)^2} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & r\cos\varphi\,(r-\sin\vartheta) & -(r\cos\vartheta\sin\varphi)\,(1-r\sin\vartheta) \\ \cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\varphi\,(r-\sin\vartheta) & (r\cos\vartheta\cos\varphi)\,(1-r\sin\vartheta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Die Funktionalmatrix ist regulär, wenn sie den maximalen Rang $\min\{2,3\} = 2$ hat. Dies ist der Fall, ausser es ist $r = 0$ oder $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

3. **a)**

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x+y}\, dy\, dx = \int_0^1 e^x \int_0^x e^y\, dy\, dx = \int_0^1 e^x(e^x - 1)\, dx = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}.$$

Der Integrationsbereich ist ein Dreieck, das von der x-Achse und den Geraden $x = 1, x = y$ eingeschlossen wird. Vertauscht man die Integration, erhält man daher die Integrationsgrenzen wie folgt:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x+y}\, dy\, dx = \int_0^1 e^y(e - e^y)\, dy = \int_0^1 e^{y+1} - e^{2y}\, dy =$$

$$[e^{y+1} - \frac{1}{2}e^{2y}]_0^1 = e^2 - e^2/2 - e + 1/2 = e^2/2 - e + 1/2.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Bei der unteren Grenze gilt $x = 4\sqrt{2y}$. Daraus folgt $y = \frac{1}{32}x^2$. Bei der oberen Grenze gilt $y = \sqrt[3]{x}$. Daraus erhält man

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^8 \int_{\frac{1}{32}x^2}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y,\ y^2 \le x\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le \sqrt{x},\ x \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

also:

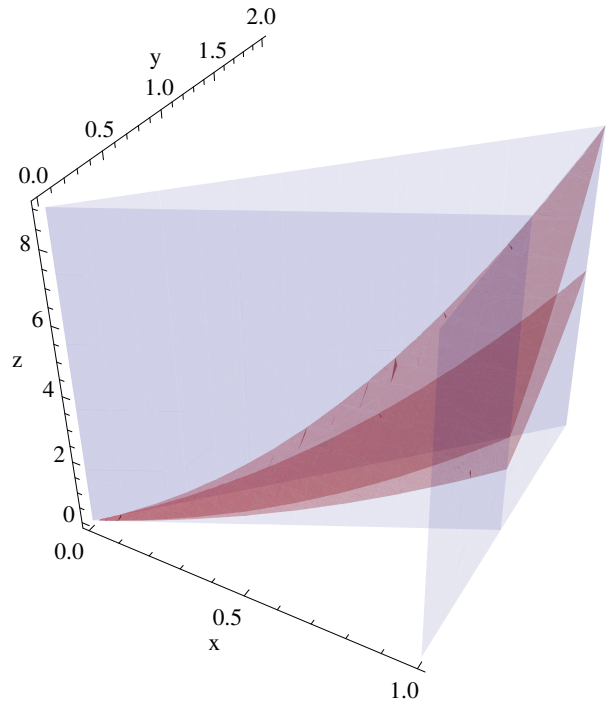
$$\begin{aligned} \int_G (x^2+y)\ d\mathrm{vol}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)dy\ dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{5/2} - x^4 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^4\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{5/2} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x\right) dx \\ &= \frac{2}{7} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{33}{140}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Integrationsgrenzen:

- Bei festgehaltenem x und y läuft z von $x^2 + y^2$ bis $x^2 + 2y^2$.
- Der Punkt $\binom{x}{y}$ läuft durch das Dreieck mit den Ecken $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{1}$ und $\binom{1}{2}$. Das bedeutet die Bedingungen $x \leq y \leq 2x$ und $0 \leq x \leq 1$.

Das Gebiet sieht wie folgt aus; Die Ebenen sind in blau, die Paraboloiden in rot gezeichnet:



$$
\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^1 \int_x^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} 1 \; dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_x^{2x} \Big((x^2 + 2y^2) - (x^2 + y^2) \Big) \; dy \, dx = \int_0^1 \int_x^{2x} y^2 \; dy \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{y^3}{3} \bigg|_{y=x}^{2x} \; dx \; = \; \int_0^1 \frac{1}{3} \left((2x)^3 - x^3 \right) \; dx \\
&= \int_0^1 \frac{7}{3} x^3 \; dx \; = \; \frac{7}{12} x^4 \bigg|_{x=0}^{1} = \frac{7}{12} \, .
\end{aligned}
$$