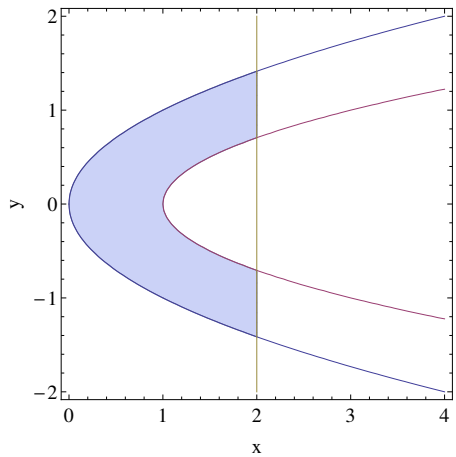
Musterlösung 8

1. Die Figur sieht wie folgt aus.



Den Flächeninhalt berechnen wir am Einfachsten als Differenz der Flächeninhalte der Mengen

$$A := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [0,2], -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

und

$$B := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [1,2], -\sqrt{\frac{x-1}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{x-1}{2}} \right\}.$$

Der Flächeninhalt der Figur ist also

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(A) - \mathrm{vol}_2(B) &= \int_0^2 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1\, dy\, dx - \int_1^2 \int_{-\sqrt{\frac{x-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{2}}} 1\, dy\, dx \\
&= 2 \cdot \int_0^2 \sqrt{x}\, dx - 2 \cdot \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2}}\, dx \\
&= 2 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 \right) \\
&= 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} \right) = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2. Sei T die Transformation

$$T\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cosh(v) \\ u \sinh(v) \end{pmatrix}.$$

a) Die Jacobi-Determinante von T ist

$$\det \nabla T \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} \cosh(v) & u \sinh(v) \\ \sinh(v) & u \cosh(v) \end{pmatrix} = u \left(\cosh^2(v) - \sinh^2(v) \right) = u.$$

Bitte wenden!

b) Es sei

$$B := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4,\ -\frac{x}{2} \leq y \leq \frac{x}{2},\ x > 0 \right\}.$$

Wir parametrisieren B durch (u, v), d.h. bestimmen das Urbild $\tilde{B} = T^{-1}(B)$ von B unter der Transformation T.

- Es gilt

$$x > 0 \;\Leftrightarrow\; u\cosh(v) > 0 \;\Leftrightarrow\; u > 0,$$

da $\cosh(v) > 0$ ist für alle $v \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt

$$x^2 - y^2 = u^2\cosh^2(v) - u^2\sinh^2(v) = u^2,$$

daher ist

$$1 \leq x^2 - y^2 \leq 4 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq u^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq u \leq 2.$$

- Für $x > 0$ gilt

$$-\frac{x}{2} \leq y \leq \frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

Es ist

$$\frac{y}{x} = \frac{u\sinh(v)}{u\cosh(v)} = \frac{\sinh(v)}{\cosh(v)} = \tanh(v).$$

Weil $\tanh$ eine streng monoton wachsende ungerade Funktion ist, folgt

$$-\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{2}\right) \leq v \leq \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Für alle $t \in (-1, 1)$ gilt

$$\operatorname{artanh}(t) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \;\Rightarrow\; \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log(3)$$

und wir erhalten $-\frac{1}{2}\log(3) \leq v \leq \frac{1}{2}\log(3)$.

Insgesamt muss also gelten

$$\tilde{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq u \leq 2,\ -\frac{1}{2}\log(3) \leq v \leq \frac{1}{2}\log(3) \right\}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Mit der Substitutionsformel aus der Vorlesung folgt

$$\begin{aligned}
\int_B e^{-x^2+y^2}\, d\mathrm{vol}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) &= \int_{\tilde{B}} e^{-u^2\cosh^2(v)+u^2\sinh^2(v)}\ |\det \nabla T\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)|\ d\mathrm{vol}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \\
&= \int_{\tilde{B}} e^{-u^2}\, u\, d\mathrm{vol}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \\
&= \int_{-\frac{1}{2}\log(3)}^{\frac{1}{2}\log(3)} \int_1^2 \mathrm{e}^{-u^2}\, u\, du\, dv \\
&= \int_{-\frac{1}{2}\log(3)}^{\frac{1}{2}\log(3)} dv \cdot \int_1^2 \mathrm{e}^{-u^2}\, u\, du \\
&= \log(3) \left[-\frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{2} \right]\Bigg|_1^2 \\
&= \log(3)\, \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-4}}{2} \\
&= \log(3)\, \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}\, \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} \log(3) \sinh\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.192.
\end{aligned}$$

3. Der Integrationsbereich $G_{a,b,c,d}$ liegt vollständig im ersten Quadranten $\left(\mathbb{R}^{>0}\right)^2$. Daher ist die folgende Transformation auf ganz $G_{a,b,c,d}$ definiert.

$$\left(\mathbb{R}^{>0}\right)^2 \to \left(\mathbb{R}^{>0}\right)^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ xy \end{pmatrix}.$$

Sie ist bijektiv mit der Umkehrfunktion

$$g : \left(\mathbb{R}^{>0}\right)^2 \to \left(\mathbb{R}^{>0}\right)^2, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{v}{u}} \\ \sqrt{uv} \end{pmatrix}.$$

Für $\tilde{G}_{a,b,c,d} := [a,b] \times [c,d]$ ist $g(\tilde{G}_{a,b,c,d}) = G_{a,b,c,d}$. Auf $\tilde{G}_{a,b,c,d}$ ist die Funktion g überall differenzierbar und ihre Jacobi-Determinante ist

$$\det(\nabla g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2u}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(G_{a,b,c,d}) &= \int_{G_{a,b,c,d}} 1\, d\mathrm{vol}_2\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \\
&= \int_{\tilde{G}_{a,b,c,d}} |\det \nabla g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)|\ d\mathrm{vol}_2\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \\
&= \int_a^b \int_c^d \frac{1}{2u}\, dvdu = \frac{d-c}{2} \int_a^b \frac{du}{u} = \frac{d-c}{2} \cdot \log\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

4. Die Punkte $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in X \subset \mathbb{R}^3$ erfüllen die Bedingungen

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &\leq 2, \\
z &\geq x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Daraus schliessen wir, dass $z \in [0, \sqrt{2}]$ ist. Für jedes solche z sind die Bedingungen äquivalent zu

$$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \min\left\{\sqrt{z}, \sqrt{2 - z^2}\right\} =: g(z).$$

Daher ist

$$X := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \in [0, \sqrt{2}], \sqrt{x^2 + y^2} \leq g(z) \right\}.$$

Es gilt

$$\sqrt{z} \leq \sqrt{2 - z^2} \Leftrightarrow z \leq 2 - z^2 \Leftrightarrow z^2 + z - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 2) \leq 0.$$

Aus der Faktorisierung sieht man, dass $\sqrt{z} \leq \sqrt{2 - z^2}$ ist genau dann, wenn $0 \leq z \leq 1$ ist. Also ist

$$g(z) = \begin{cases} \sqrt{z}, & \text{für } 0 \leq z \leq 1, \\ \sqrt{2 - z^2}, & \text{für } 1 < z \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Mit einer Formel aus der Vorlesung folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(X) &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi g(z)^2 \,\mathrm{d}z = \int_0^1 \pi z \,\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{2}} \pi \left(2 - z^2\right) \,\mathrm{d}z \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 + \left(2z - \frac{1}{3} z^3\right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \right) = \pi \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{6} \right). \end{aligned}$$