Serie 11

Flächenintegral

1. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Torus $T \subset \mathbb{R}^3$ mit Radien r und R für $r < R$. Verwenden Sie dazu folgende "torische Koordinaten":

$$f\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\psi)\cos\varphi \\ (R + r\cos\psi)\sin\varphi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \psi < 2\pi \end{matrix} .$$

Vektorfelder

2. Konstruieren Sie ein im ganzen Raum definiertes Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das die Schraubenlinien

$$\gamma_{r,\vartheta} \ : \ t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ t - \vartheta \end{pmatrix}, \qquad r \ge 0,\ \vartheta \in \mathbb{R}$$

als Feldlinien besitzt.

Potentiale

3. Bestimme für folgende Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ ein Potential, falls ein solches existiert.

a) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^3 \\ x + 5y \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 5 \\ 2xy - 8 \end{pmatrix}$

4. Für welche Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (a+x)y^2\sin(z)e^x \\ bxy\sin(z)e^x \\ cxy^2\cos(z)e^x \end{pmatrix},$$

welches auf $\mathbb{R}^3$ definiert ist, ein Potential, und welches?

Bitte wenden!

Multiple-Choice-Aufgaben

1. Welche der folgenden Aussagen über die Feldlinien eines nirgends verschwindenden stetig differenzierbaren Vektorfelds K ist korrekt?

(a) Feldlinien werden immer mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

(b) Die Feldlinien sind orthogonal zu K.

(c) Feldlinien laufen immer zum Rand des Definitionsbereichs hin.

(d) Jeder Punkt liegt auf genau einer Feldlinie.

(e) Jede Feldlinie geht durch genau einen Punkt.

2. Zwei Vektorfelder mit bis auf Umparametrisierung gleichen Feldlinien ...

(a) sind überall gleich.

(b) haben überall dieselbe Richtung und Orientierung.

(c) haben überall dieselbe Richtung.

(d) haben überall dieselben partiellen Ableitungen.

Siehe nächstes Blatt!

3. Ein Oldtimer-Motorrad fährt mit konstanter Geschwindigkeit v geradeaus in Richtung der x-Achse. Die Kraftübertragung geschieht durch eine Kardanwelle, welche entlang der x-Achse gelagert ist. Das Geschwindigkeitsvektorfeld, dem ein Punkt auf der Welle gehorcht, hat für gewisse Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Form…

(a)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} vt \\ a\cos(bt+c) \\ a\sin(bt+c) \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} v \\ a\cos(bx+c) \\ a\sin(bx+c) \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} v \\ -az+b \\ ay+c \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

4. Ein Professor glaubt, dass alle seine Studierenden, egal wieviel oder wie wenig sie schon wissen und können, in seiner Vorlesung etwas lernen. Ausserdem glaubt er, dass die Lernkurve eines/er Studierenden umso steiler ist, je niedriger sein/ihr Wissensstand $w \geq 0$ zu einem gegebenen Zeitpunkt $t \geq 0$ ist. Der Lerneffekt hängt allerdings auch von t ab, weil mancher Stoff eingängiger ist als anderer. Welches der folgenden Richtungsfelder in der (t, w)-Ebene erfüllt diese Eigenschaften?

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ wt \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{1+w} \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2+\cos t}{1+w} \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\cos t}{1+w} \end{pmatrix}$$