Serie 12

Vektorielles Kurvenintegral

1. In Serie 11, Aufgabe 3b) haben Sie das Potential des folgenden Vektorfeldes auf $\mathbb{R}^2$ direkt berechnet.

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+5 \\ 2xy-8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie hier ein Potential durch ein Kurvenintegral und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus der anderen Aufgabe.

Integralsatz von Green im $\mathbb{R}^2$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale zuerst als Wegintegrale, dann mit Hilfe des Satzes von Green:

a) $I_a := \displaystyle\int_{\partial B} \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot d\binom{x}{y}$ mit $B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^{2/3} \right\}$

b) $I_b := \displaystyle\int_{\partial B} \begin{pmatrix} y \\ \sin x \end{pmatrix} \cdot d\binom{x}{y}$ mit $B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \cos(x) \right\}$

3. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des durch die Kurve

$$\gamma = \{ \tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x \}$$

begrenzten Gebiets (siehe Abbildung 1). Schreiben Sie dazu die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten und parametrisieren Sie so die Kurve durch den Polarwinkel φ. Wenden Sie dann den Satz von Green auf ein geeignetes Vektorfeld an.

4. Die Randkurve ∂B des in Abbildung 2 dargestellten Bumerangs B kann parametrisiert werden durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^2(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } \ t \in [\,0, 2\pi[.$$

Bestimmen Sie den Schwerpunkt von B.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green mit einem geeigneten Vektorfeld zum Berechnen sowohl der Masse, als auch des Schwerpunkts von B. Benutzen Sie ferner die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\,dt = \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(t)\,dt = 0 \ \text{ für alle } \ n \in \mathbb{N}.$$

Bitte wenden!

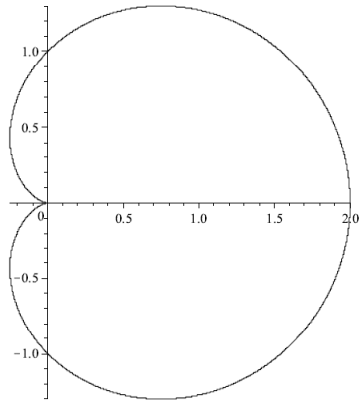

Abbildung 1: Gebiet zu Aufgabe 3

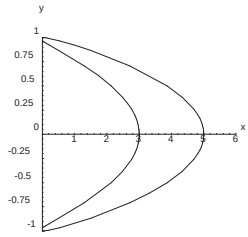

Abbildung 2: Der Bumerang aus Aufgabe 4

Integralsatz von Gauss im $\mathbb{R}^2$

5. Gegeben seien das Dreieck $B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \right\}$ und das Vektorfeld

$$\mathbf{K} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von K durch den Rand ∂B von innen nach aussen ...

a) als Flussintegral.

b) mit Hilfe des Satzes von Gauss.

Siehe nächstes Blatt!

Multiple-Choice-Aufgaben

1. Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential?

(a) $(x - y,\, x - y)$

(b) $(x^2 - y,\, x^3 + 2xy)$

(c) $(x^3 + 2xy,\, x^2 - y)$

(d) $(x^3 - xy^2,\, x^2y - y^5)$

Bitte wenden!

2. Sei K ein auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiertes und dort stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der folgenden Aussagen ist nicht äquivalent zu den anderen?

(a) K ist konservativ.

(b) Das Linienintegral von K über jeden geschlossenen Weg ist gleich Null.

(c) $\dfrac{\partial K_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial K_j}{\partial x_i}$ für alle i und j.

(d) K besitzt ein Potential.

(e) $\operatorname{div} K = 0$.

(f) Das Linienintegral von K über jeden Weg hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.

(g) Alle sind äquivalent.

3. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jedes stetige Vektorfeld mit geschlossenen Feldlinien ist konservativ.

(b) Ein nicht-triviales stetiges Vektorfeld mit geschlossenen Feldlinien ist nie konservativ.

(c) Die Eigenschaften haben keinen Zusammenhang.

Siehe nächstes Blatt!

4. Welches ist keine gültige Formel für den Flächeninhalt von $B \subset \mathbb{R}^2$?

(a) $\displaystyle\int_{\partial B} x\,dy$

(b) $\displaystyle\int_{\partial B} (x^2 + y^2)\,dx + (2xy + x)\,dy$

(c) $\displaystyle\int_{\partial B} \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$

(d) $\displaystyle\int_{\partial B} y\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{\partial B} \frac{r^2}{2}\,d\phi$ in Polarkoordinaten (r, ϕ)