Serie 4

Kettenregel

1. Sei $x(t) = \cos \pi t$ und sei $y(t)$ diejenige Stammfunktion von e^{-t^2}, die an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Ausserdem sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t)\right)\Big|_{t=1}$$

der Funktion $t \mapsto f\left(x(t), y(t)\right)$ im Punkt $t = 1$.

Anwendungen, Approximation

2. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \arctan\big(2x^2 + 3xy - 4y^2\big)\,.$$

Schreiben Sie die lineare Approximation von f um den Punkt $P := (1, 1)$ hin und berechnen Sie daraus einen Näherungswert für $f(1.02, 0.97)$. Vergleichen Sie diesen mit dem genauen Wert.

Ableiten unter dem Integral

3. Die Funktion $t \mapsto F(t)$ sei gegeben durch

$$F(t) = \int_1^2 \frac{e^{tx}\sqrt{1 + t^2 x}}{x(x + 1)} dx.$$

Berechnen Sie $\dot{F}(0)$.

4. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$I(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{e^{tx^2}}{x}\, dx$$

in integralfreier Form.

Bitte wenden!

Multiple-Choice-Aufgaben

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar. Welcher Ausdruck ist im allgemeinen *nicht äquivalent zu den anderen?*

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

(b) $D_{(1,0)} f(x_0, y_0)$

(c) $D_{(-1,0)} f(x_0, y_0)$

(d) $-D_{(-1,0)} f(x_0, y_0)$

2. Welche ist die Menge M der Punkte, an denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |xy|,$$

differenzierbar ist?

(a) $M = \emptyset$.

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \neq 0\}$.

(c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

(d) $M = \mathbb{R}^2$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

(a) der minimalen partiellen Ableitung.

(b) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

(c) des Gradienten.

(d) entgegengesetzt zum Gradienten.

(e) orthogonal zum Gradienten.

4. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $f\binom{0}{0} = 0$ und $f\binom{x}{y} = \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ sonst, ist im Ursprung

(a) nur partiell differenzierbar.

(b) partiell differenzierbar, aber nicht in jede Richtung differenzierbar.

(c) in jede Richtung differenzierbar, aber nicht total differenzierbar.

(d) total differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

(e) stetig differenzierbar.