Serie 6

Implizite Funktionen

1. Die Funktion $F(x, y)$ sei gegeben durch

$$F(x, y) := \mathrm{e}^y + y + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 0$ überall lokal der Graph einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $y = \varphi(x)$ ist.

b) Hat die Funktion $\varphi(x)$ lokale Extrema? Handelt es sich dabei um lokale Maxima oder Minima?

2. Bestimmen Sie die regulären Punkte der folgenden Teilmengen.

a) Die Nullstellenmenge $K \subset \mathbb{R}^2$ von $g(x, y) = y^2 - x^3 - c$ für einen Parameter $c \in \mathbb{R}$.

b) Die Lösungsmenge $T \subset \mathbb{R}^3$ der Gleichung $\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = 1$.

c) Die gemeinsame Lösungsmenge $C \subset \mathbb{R}^3$ der Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^4 + y^4 - z^3 = 0$.

Extrema mit Nebenbedingungen

3. Bestimmen Sie den Abstand der Fläche $S\colon z = xy + 1$ vom Koordinatenursprung.

4. Für Flüge in Absurdistan gelten folgende Vorschriften für das Handgepäck: Erlaubt ist ein und nur ein quaderförmiges Gepäckstück mit den Seitenlängen $x, y, z \geq 0$. Dessen Gesamtkantenlänge, also $4x + 4y + 4z$, muss 43.2 Latschen (offizielle absurde Längeneinheit) betragen, und dessen Gesamtoberfläche, also $2xy + 2xz + 2yz$, muss 43.2 Quadratlatschen betragen. (Die Zahlenwerte haben historische Gründe, und alle Versuche, sie zu modernisieren, sind am erbitterten Widerstand der Minderheitspartei, die traditionell den Verkehrsminister stellt, gescheitert.) Wie gross ist das maximale Volumen, das man auf einen absurdischen Flug mitnehmen darf, und welche Masse muss das Gepäckstück dafür haben?

Bitte wenden!

Multiple-Choice-Aufgaben

1. Betrachten Sie die Funktionen $f(x, y) = x$ und $g(x, y) = x^2 + y^2$ auf $\mathbb{R}^2$ und die zugehörige Lagrangefunktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

auf $\mathbb{R}^3$. Welche Aussage ist richtig?

(a) f besitzt kein Maximum unter der Nebenbedingung $g(x, y) - 1 = 0$.

(b) Das Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) - 1 = 0$ entspricht einem kritischen Punkt von f.

(c) Das Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) - 1 = 0$ entspricht einem kritischen Punkt von L.

(d) f besitzt einen bedingt kritischen Punkt unter der Nebenbedingung $g(x, y) - 1 = 0$, der nicht einem kritischen Punkt von L entspricht.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Siehe nächstes Blatt!

2. Sei L eine Niveaumenge $f = c$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und sei $z_0 \in L$ ein Punkt mit Gradient $u_0 := \nabla f(z_0) \neq (0, \ldots, 0)$. Welche Aussage ist richtig?

(a) u_0 liegt in der Tangentialhyperebene an L in z_0.

(b) u_0 liegt nicht in der Tangentialhyperebene, aber alle anderen Richtungen sind möglich.

(c) u_0 und die Tangentialhyperebene stehen in keiner Beziehung.

(d) u_0 steht senkrecht auf der Tangentialhyperebene.

3. Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0, y_0) = a$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ existiert eine differenzierbare Funktion ϕ, welche in einer Umgebung von x_0 definiert ist und dort die Gleichung $f(x, \phi(x)) = a$ löst.

(a) Diese Aussage folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

(b) Diese Aussage gilt nur für $a = 0$.

(c) Man muss in der Voraussetzung $f_x \neq 0$ verlangen anstatt $f_y \neq 0$.

(d) Man muss in der Voraussetzung zusätzlich $f_x \neq 0$ verlangen.