Dr. Francesca da Lio Sommer 2012

Basisprüfung Komplexe Analysis

D-ITET, RW

Hinweise:

- Zweistündige Prüfung, zusammen mit lineare Algebra vier Stunden
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (=10 Blätter) eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben), Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründen Sie stets Ihre Aussagen. Nicht motivierte Rechnungen oder Lösungen werden nicht akzeptiert.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $f(z)$ eine holomorphe Funktion , so dass

$$f''(z) = \int_{\partial C_1(0)} \frac{\sin^2 \xi}{(\xi - z)^3} d\xi, \quad \forall |z| < 1\,,$$

wobei $C_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit mathematisch positiver Orientierung.
Bestimmen Sie eine Funktion f, so dass zusätzlich $f(0) = 1$ und $f'(0) = 2$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es seien die Funktionen

$$f_m(z) = \frac{\sin(\frac{1}{z})}{z^m}\,, \quad m \in Z\,,$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie für jedes $m \in Z$ die Laurent-Entwicklung von f_m an der Stelle $z = 0$.

b) Bestimmen Sie die Zahlen m, für die $\int_{\partial C_1(0)} f_m(z)dz \neq 0$, wobei $C_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit mathematisch positiver Orientierung.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Es sei die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{3iz}}{(z^2+9)^2}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie Lage und Typ der isolierten Singularitäten von f and berechnen Sie die entsprechenden Residuen.

b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+9)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten Sie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(t) = e^{2t}\,, -\pi \leq t \leq \pi\,.$$

a) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von f.

b) In welchen Punkten konvergiert diese Fourier-Reihe?

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Parseval den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+n^2}\,.$$

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Es sei

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0\,, \\ t\,, & 0 \leq t \leq 2\,, \\ 2\,, & t > 2\,. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Wachstumskoeffizienten und die Laplacetransformation von f.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation das folgende Anfangswertproblem: Bestimmen Sie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion y, so dass

$$\begin{aligned} y''(t) + 4y &= f(t)\,, \quad t > 0\,, \\ y(0) &= 0\,, \\ y'(0) &= 0\,. \end{aligned}$$