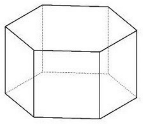
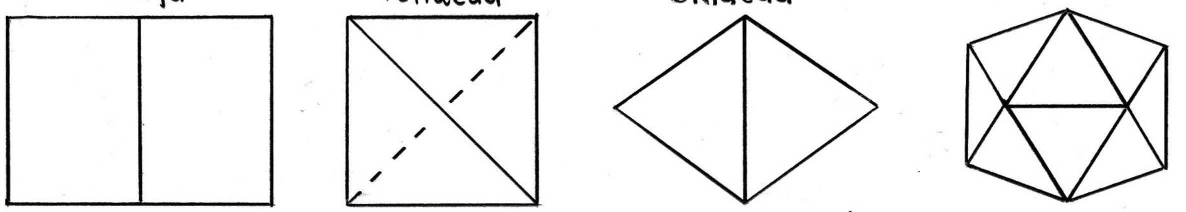
Übungsserie 4 FS 2013 Seite 1

1 (a) ... gleichen Abstand: Tetraeder, ... parallel: Würfel, Okta-, Dodeka-, Ikosaeder

(b) Es gibt unendlich viele Prismen mit quadratischen Seitenflächen: Deck- und Grundfläche bilden 2 kongruente, regelmässige n-Ecke, die senkrecht übereinander und parallel zueinander angeordnet sind. Der Abstand der beiden Flächen entspricht der Seitenlänge der n-Ecke.



(c) Würfel | Tetraeder | Oktaeder | Ikosaeder

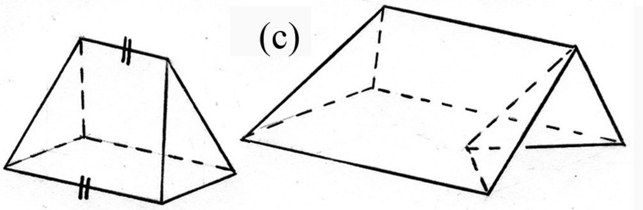


Umriss: (Rechteck) | (Quadrat) | (Parallelogramm)

2 $e = n+2$, $k = n + (n+2) + 1 = 2n+3$, $f = n+3$

$e - k + f = n + 2 - (2n+3) + n + 3 = 2$ ✓

(b) Parallel zu einer n-Eck Seite



3 $z^2 = (x+y)^2 - x^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 = 2xy + y^2$ (Pythagoras)

$x^2 - y^2 = |MB|^2 = z^2 - x^2$

$x^2 - y^2 = 2xy + y^2 - x^2 \leftrightarrow 2x^2 - 2xy - 2y^2 = 0 \;\|:2y^2 \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$ Setze $\tau = \frac{x}{y}$ (oder $y=1$)

$\tau^2 - \tau - 1 = 0$ QG $\rightsquigarrow \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

Verhältnis des Goldenen Schnitts

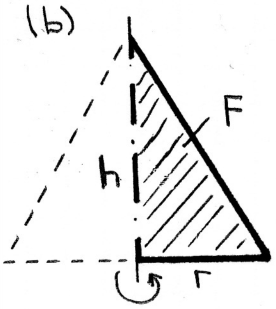
4 (a) Volumen, Oberfläche: V_1, S_1 (kleines Gebäude); V_2, S_2 (grosses Gebäude)

λ Längenfaktor $\rightsquigarrow V_2 = \lambda^3 V_1$, $S_2 = \lambda^2 S_1$

$\lambda^3 = \frac{V_2}{V_1} = 1.331 = 1.1^3$, $\lambda^2 = \frac{S_2}{S_1} = 1.1^2 = 1.21$, $S_2 = 1.21\, S_1$

Die Gebäudeoberfläche und damit die Wärmeabstrahlung nimmt um <u>21%</u> zu.

(b)



λ: Massstäblicher Vergrösserungsfaktor; (2 nachher; 1 vorher)

Fläche $F_2 = \lambda^2 F_1 \overset{\text{soll}}{=} 1.44\, F_1 \rightsquigarrow \lambda = 1.2$

Radius $r_2 = \lambda r_1$

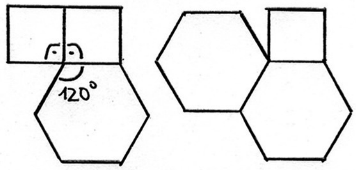
Höhe $h_2 = \lambda h_1$

Volumen $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \lambda^3 V_1 = 1.728 \cdot V_1 \rightsquigarrow$ <u>72.8%</u>

5 (a) 3-kantige Ecken $\rightsquigarrow$ Eine Eckfigur besteht aus 3 Flächen

1. Möglichkeit: 2 Quadrate und 1 reg. 6-Eck $\rightsquigarrow$ $\sphericalangle$ Summe $300°$ ✓

2. Möglichkeit: 1 Quadrat und 2 reg. 6-Ecke $\rightsquigarrow$ $\sphericalangle$ Summe $330°$ ✓



(b) Siehe Figur 5 (Aufgabenblatt)

(c) ① $3 \cdot e = 2k$ (In jeder Ecke stossen 3 Kanten zusammen, jede wird dabei doppelt gezählt.)

② $f = 6 + 8 = 14$

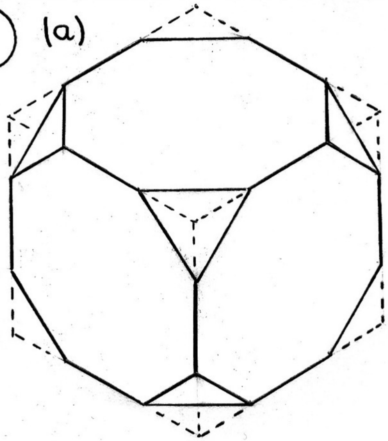
③ $8n_1 + 6n_2 = 2k$ (Jedes der acht n_1-Ecke hat n_1 Kanten, jedes der sechs n_2-Ecke hat n_2 Kanten, Doppelt gezählt)

$$2 = e - k + f = \frac{2}{3}k - k + 14$$
$$= -\frac{1}{3}k + 14 = -\frac{1}{3}(4n_1 + 3n_2) + 14$$
$$\frac{1}{3}(4n_1 + 3n_2) = 12$$
$$\underline{4n_1 + 3n_2 = 36}$$

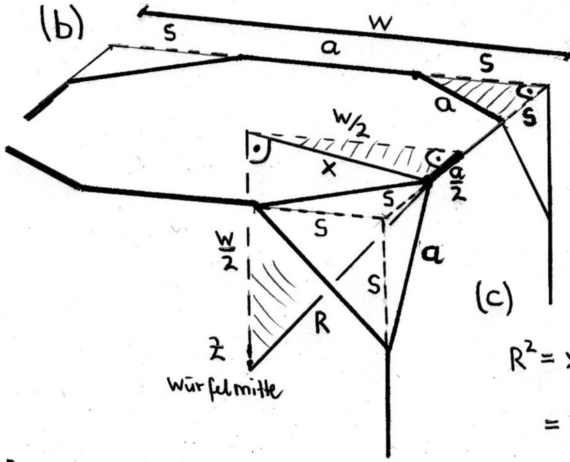
Einzige natürlichzahlige Lösungen: $n_1 = 3,\ n_2 = 8$
$n_1 = 6,\ n_2 = 4$

---

6 (a)



(b)



$$a^2 = s^2 + s^2 = 2s^2, \quad a = \sqrt{2}\,s$$
$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}$$
$$w = s + a + s = a + \frac{2a}{\sqrt{2}}$$
$$\underline{w = a(1 + \sqrt{2})}$$

(c)
$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2$$
$$R^2 = x^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{w^2}{4} + \frac{w^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}w^2$$
$$= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 a^2 = \left(\frac{7}{4} + \sqrt{2}\right)a^2$$
$$R = \sqrt{\frac{7}{4} + \sqrt{2}}\ a \approx \underline{1.7788\,a}$$

(d)
$$V_{Würfel} = w^3 = a^3(1+\sqrt{2})^3, \quad V_{Ecke} = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{s \cdot s}{2} \cdot s = \frac{1}{6}s^3$$
$$V = V_{Würfel} - 8 \cdot V_{Ecke} = a^3(1+\sqrt{2})^3 - 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}^3} \approx \underline{a^3 \cdot 13.59966}$$