Studiengang Architektur | Mathematisches Denken | SS 2006

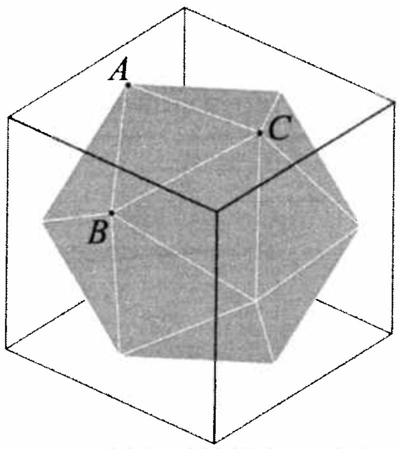
Übungsserie 4

Abgabe der (ohne TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 16. Juni 2006**

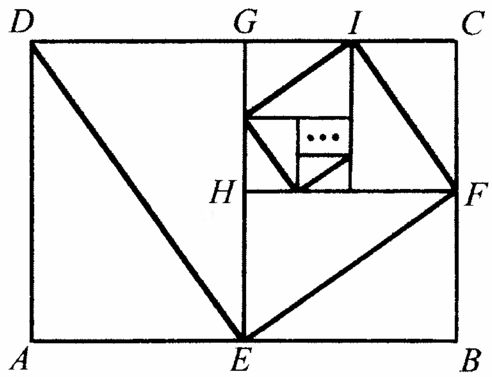
1. Das **reguläre Ikosaeder** mit der Kantenlänge a lässt sich in einen Würfel einbetten, so dass sechs paarweise einander gegenüberliegende Ikosaederkanten zentriert auf den Würfelflächen liegen (Figur 1).

   (a) Berechnen Sie die Oberfläche S des Ikosaeders und die Kantenlänge k des Einbettungswürfels. Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2.5 (vgl. Notizen zur Vorlesung)

   (b) Verbinden Sie den Mittelpunkt des Ikosaeders/Würfels mit den drei Eckpunkten einer Ikosaederseitenfläche und berechnen Sie mithilfe dieser Pyramide das Volumen V des Ikosaeders. Hinweis: $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+3)}{12}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$



Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. Schneidet man von einem **Rechteck vom Format DIN-A0** die Hälfte ab, so dass die längeren Seiten halbiert werden, entsteht ein massstäblich verkleinertes Rechteck vom Format DIN-A1. Durch Fortsetzen des Verfahrens entsteht eine unendliche Folge von DIN-A...-Rechtecken und, wenn man in jedem Rechteck die passende Diagonale betrachtet, eine Art eckige 'Spirale' (Figur 2).

   (a) Beschreiben Sie in Worten die exakte Lage des Zentrums der 'Spirale' und begründen Sie ihre Antwort.

   (b) Berechnen Sie die Länge der 'Spirale' durch Ausnutzen der 'Selbstähnlichkeit'. (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt, $|DE| \approx 1.03$ m muss nicht berechnet werden.)

3. **Verkettungen von Kongruenztransformationen:** Ermitteln Sie folgende Verkettungen: Bezeichnungen gemäss den Beispielen 2.6 - 2.10 (vgl. Notizen zur Vorlesung)

$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} =$	$S_g \circ S_g =$	$R_{Z,\alpha} \circ R_{Z,\alpha} =$	$\Pi_Z \circ \Pi_Z =$
$T_{\vec{v}}^{-1} =$	$S_g^{-1} =$	$R_{Z,\alpha}^{-1} =$	$\Pi_Z^{-1} =$
$T_{\vec{v}} \circ I =$	$(T_{\vec{v}}^{-1})^{-1} =$	$(S_g \circ T_{\vec{v}})^{-1} =$	$I^{-1} =$

Bitte wenden!

Übungsserie 4

4. Im Jahre 1202 erschien das Buch 'Liber abaci' (Buch über die Rechenkunst) von Leonardo von Pisa, genannt **Fibonacci**. Berühmt wurde dieses Buch (und mit ihm sein Verfasser) durch die folgende Aufgabe über Kaninchenpaare:
Wir nehmen an, dass Kaninchen beliebig lang leben und dass im 1. Monat genau ein (neugeborenes) Paar vorhanden ist. In der Folge wird jedes Kaninchenpaar nach Ablauf von einem Monat gebärfähig und bringt von da an jeden weiteren Monat ein neues Paar zur Welt.

   (a) Bezeichne a_n die Anzahl Kaninchenpaare, die im n-ten Monat vorhanden sind. Berechnen Sie $a_1, \ldots, a_6$, und begründen Sie, dass gilt: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

   (b) Durch $b_1 := 1$ und $b_n := \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ werden Zahlen $b_1, b_2, b_3 \ldots$ definiert. Berechnen Sie $b_1, \ldots, b_6$ und zeigen Sie, dass für die Zahlen b_n das Bildungsgesetz $b_{n+1} = \dfrac{1}{1+b_n}$ gilt. (Aus diesem Bildungsgesetz ergibt sich die Kettenbruchdarstellung der Zahlen: $b_2 = \frac{1}{1+b_1} = \frac{1}{1+1}$, $b_3 = \frac{1}{1+b_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$, $b_4 = \frac{1}{1+b_3} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \ldots$)

   (c) Die Zahlen b_{n+1} (und damit ihre Kettenbrüche) nähern sich für $n \to \infty$ immer mehr einem speziellen Wert an. Welchem? Begründen Sie Ihre Antwort!

5. **Abstrakte Gruppen**: Welche der folgenden Zahlenmengen bilden bezüglich der Zahlen-Multiplikation (Zeichen $\cdot$) eine Gruppe? Ist die Gruppe endlich oder unendlich, kommutativ oder nicht-kommutativ?

$\mathbb{P}$	Menge der Primzahlen
$\mathbb{D}$	Menge der natürlichen Vielfachen von 3
\$	Menge der Quadratzahlen
$\mathbb{Q}^+$	Menge der positiven, rationalen Zahlen (Die Menge aller Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen)

   Verifizieren Sie im Falle einer Gruppe alle Gruppenaxiome, anderenfalls genügt es, das 'erste', nicht erfüllte Gruppenaxiom anzugeben und anhand eines Zahlen-Beispiels zu verdeutlichen.

6. Die Menge der **Symmetrietransformationen** Symm(Ω) einer ebenen Figur Ω sei gegeben durch Symm(Ω) $= \{I, U, V, W, X, Y\}$.

   (a) Ergänzen Sie die Tafel, so dass eine Gruppe entsteht.

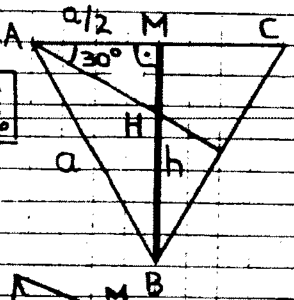
   (b) Skizzieren Sie eine Figur Ω, die diese Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie *eine* mögliche 'Lösung' für U, V, W, X, Y an.

$\circ$	I	U	V	W	X	Y
I						
U		V				
V			X			U
W				I		
X						W
Y			U		W	

   (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gruppentafel alle Lösungen T (Symmetrietransformationen von Ω) der folgenden Gleichung: $V \circ T \circ T = I$

Serie 4
SS 2006

(1)



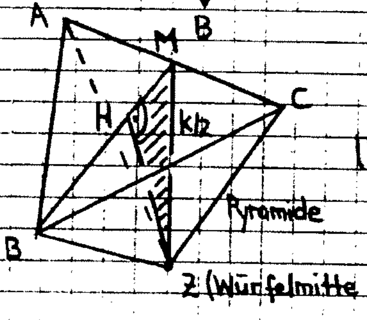
(a) Pythagoras im $\llcorner$-ΔAMB: $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Fläche ΔABC: $F = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Oberfläche Ikosaeder: $S = 20 \cdot F = \underline{\underline{5\sqrt{3}\,a^2}}$

AC und die ihr gegenüberliegende Kante bilden ein Goldenes Rechteck mit Breite a und Länge k (Aufgabe 2.5, Skript)

$\frac{k}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \underline{\underline{k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a}}$



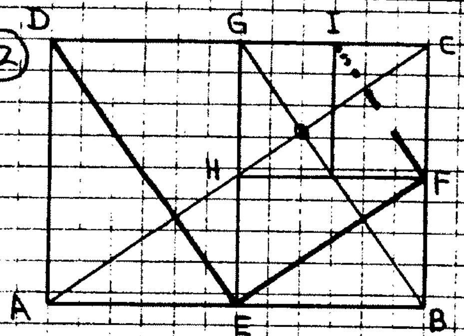
(b) Im $\llcorner$-ΔAHM: $\frac{|MH|}{a/2} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow |MH| = \frac{\sqrt{3}}{6}a \left(= \frac{1}{3}h\right)$

Im $\llcorner$-ΔMHZ: $|MH|^2 + |HZ|^2 = |MZ|^2$, $|MZ| = k/2$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + |HZ|^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}a\right)^2 \xrightarrow{\text{Hinweis}} |HZ| = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+3)}{12}a$

Volumen Ikosaeder: $V = 20 \cdot V_{Pyram.} = 20 \cdot \frac{1}{3}F \cdot |HZ| = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+3)}{12}a = \underline{\underline{\frac{5(\sqrt{5}+3)}{12}a^3}}$

(2)



(a) Das Zentrum O der Spirale ist der Schnittpunkt von AC und BG.
Die entstehenden DIN-Rechtecke liegen abwechselnd horizontal und vertikal. Jedes horiz. Rechteck ist eine massstäbl. Verkleinerung (z.B. HFCG von ABCD) des vorhergehenden horiz. Rechtecks und hat aufgrund seiner Ecklage seine Diagonale auf jenem, also auf AC. Ebenso haben alle vertikalen Rechtecke ihre Diagonale auf BG. Im Grenzfall fallen die Rechtecke in einen Pt. zusammen, und zwar im Schnittpunkt O von AC und BG.

(b) Selbstähnlichkeit: Jedes DIN-Rechteck ist eine massstäbliche Verkleinerung (plus Drehung um 90°) des Vorhergehenden um den Faktor λ:

$ABCD \rightsquigarrow EBCG \rightsquigarrow HFCG$, $\quad |HF| = \lambda|BC| = \lambda^2|AB|$ $\;(\cdot 1/2)$, $\quad \lambda^2 = \frac{|HF|}{|AB|} = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Länge $L = |DE| + \underbrace{|EF| + |FI| + \ldots}_{\lambda|DE| + \lambda|EF| + \lambda(\ldots)} = |DE| + \lambda\underbrace{(|DE| + |EF| + \ldots)}_{L} = |DE| + \frac{1}{\sqrt{2}}L \quad | \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{2}L = \sqrt{2}|DE| + L$, $\quad \sqrt{2}L - L = \sqrt{2}|DE|$, $\quad \underline{\underline{L = \frac{\sqrt{2}|DE|}{\sqrt{2}-1}}}$

(3)

$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} = T_{2\vec{v}}$ $\qquad S_g \circ S_g = I$ $\qquad R_{Z,\alpha} \circ R_{Z,\alpha} = R_{Z,2\alpha}$ $\qquad \Pi_Z \circ \Pi_Z = I$

$T_{\vec{v}}^{-1} = T_{-\vec{v}}$ $\qquad S_g^{-1} = S_g$ $\qquad R_{Z,\alpha}^{-1} = R_{Z,-\alpha}$ $\qquad \Pi_Z^{-1} = \Pi_Z$

$T_{\vec{v}} \circ I = T_{\vec{v}}$ $\qquad (T_{\vec{v}}^{-1})^{-1} = T_{\vec{v}}$ $\qquad (S_g \circ T_{\vec{v}})^{-1} \overset{*}{=} T_{\vec{v}}^{-1} \circ S_g^{-1}$ $\qquad I^{-1} = I$

$= T_{-\vec{v}} \circ S_g$ — zuerst S_g rückgängig

$*$ $\quad P \underset{T_{-\vec{v}}}{\overset{T_{\vec{v}}}{\rightleftarrows}} \cdot \underset{S_g^{-1} = S_g}{\overset{S_g}{\rightleftarrows}} P''$

zuerst S_g rückgängig, dann $T_{\vec{v}}$

④ (a) Monat: o $\hat{=}$ nicht gebärfähig, x $\hat{=}$ gebärfähig, ↘ Gebärt

	Monat		
	1	o	$a_1 = 1$
	2	x	$a_2 = 1$
z.B.	3	x o	$a_3 = 2$
n	4	x o x	$a_4 = 3$
n+1	5	x o x x o	$a_5 = 5$
n+2	6	x o x x o x o x	$a_6 = 8$

Im (n+1)-ten Monat (z.B. n+1 = 5) gibt es a_{n+1} (= 5) Kaninchenpaare. Von diesen sind a_n ($\hat{=}$ 3) gebärfähig, nämlich diejenigen, die im n-ten (4) Monat gelebt haben. Im (n+2)-ten (6) Monat kommen zu a_{n+1} ($\hat{=}$ 5) genau a_n ($\hat{=}$ 3) neugeborene Paare dazu: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(b) $b_1 = 1,\ b_2 = \frac{1}{2},\ b_3 = \frac{2}{3},\ b_4 = \frac{3}{5},\ b_5 = \frac{5}{8},\ b_6 = \frac{8}{13}$

$$\frac{1}{1+b_n} \underset{\text{Def}}{=} \frac{1}{1+\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1\cdot a_{n+1}}{\left(1+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{(a_{n+1}+a_n)} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = b_{n+1}$$

Erweitern mit a_{n+1} — Bildungsgesetz a_n

(c) Nach Satz 2.8 gilt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \phi$ und somit $b_{n+1} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-1} \longrightarrow \phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Bem: Also gilt für den unendl. Kettenbruch:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}} = \phi^{-1}$$

(Kettenbruchdarstellung des Gold. Schnitts)

⑤ $\mathbb{P}$ Keine Gruppe, denn $s,t \in \mathbb{P}$: $s\cdot t$ keine Primzahl, z.B. $2\cdot 3 = 6$ (G1) nicht erfüllt

$\mathbb{D}$ keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{D}$: $e\cdot t = t\cdot e = t \to e = 1$ kein Vielfaches von 3
(G2) nicht erfüllt

\$ keine Gruppe, denn $t \in \$$: $t\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot t = 1$ (Neutralelement) $\to t^{-1} = \frac{1}{t}$ keine Quadratzahl
(G3) nicht erfüllt

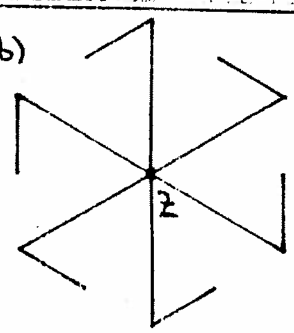
$\mathbb{Q}^+$ unendliche, kommutative Gruppe: (G1) Für bel. Bruchzahlen s, t ist $s\cdot t$ auch eine Bruchzahl
(G2) Für bel. $r,s,t \in \mathbb{Q}^+$ gilt stets $(r\cdot s)\cdot t = r\cdot(s\cdot t)$ (G3) $1 \in \mathbb{Q}^+$ und $t\cdot 1 = 1\cdot t = t$, alle $t \in \mathbb{Q}^+$
(G4) zu $t \in \mathbb{Q}^+$ ist $\frac{1}{t} =: t^{-1}$ auch Bruchzahl mit $t\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot t = 1$ (K6) Für $s,t \in \mathbb{Q}^+$ gilt $s\cdot t = t\cdot s$

⑥ (a)

o	I	U	V	W	X	Y
I	I	U	V	W	X	Y
U	U	V	W ⑥	X ②	Y	I ⑤
V	V	W ①	X	Y ①	I	U
W	W	X ②	Y ①	I	U ⑤	V ③
X	X	Y	I	U ⑥	V	W
Y	Y	I ⑤	U	V ③	W	X

(Symm(Ω) hat 6 Elemente, ist kommutativ $\rightsquigarrow C_6$)

(b)



U V ... Y
$R_{z,60°}$ $R_{z,120°}$ ... $R_{z,300°}$

(c) Gruppentafel: $V \circ X = I$ (eindeutig!) $\rightsquigarrow T \circ T = X$

Gruppentafel: $V \circ V = X$ oder $Y \circ Y = X$ $\rightsquigarrow T = V$ oder $T = Y$

oder: $R_{z,120°} \circ R_{z,\alpha} \circ R_{z,\alpha} = R_{z,360°}$ $\rightsquigarrow 120° + \alpha + \alpha = 360°$ od. $720°$

$\rightsquigarrow \alpha = 120°$ ($\hat{=}$ V) od. $\alpha = 300°$ ($\hat{=}$ Y)