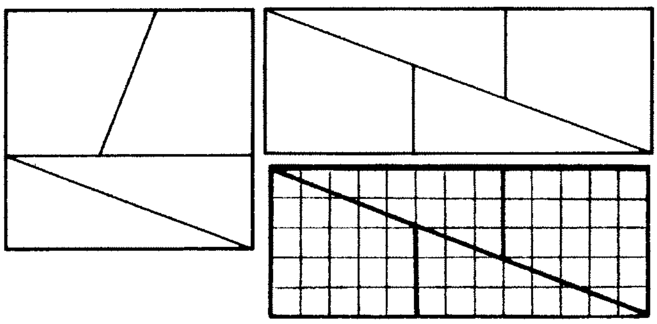
Übungsserie 4

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 1. Juni 2007** in der Vorlesung

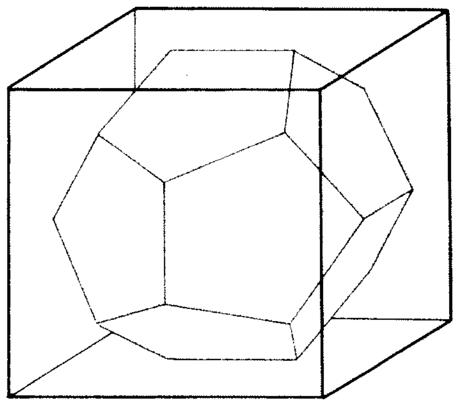
1. Sei f_n die n-te **Fibonacci**-Zahl. (Die FIBONACCI-Zahlen bilden die wohl bekannteste Zahlenfolge. Sie kommen an sehr vielen Stellen innerhalb und ausserhalb der Mathematik vor. Googlen Sie selbst!)

   (a) Zeigen Sie, dass $f_3 f_1 - f_2^2 = 1$ ist und allgemein, dass die so genannte SIMPSON-Identität $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ gilt.
   (Zeigen Sie: $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)(f_n f_{n-2} - f_{n-1}^2)$ und schliessen Sie induktiv weiter auf $f_3 f_1 - f_2^2$.)

   (b) Ein Quadrat wird durch einen Schnitt parallel zu einer Seite in zwei Teile unterteilt, welche je in zwei kongruente Stücke halbiert werden (Figur 1a). In welchem Verhältnis muss man das Quadrat unterteilen, damit die entstehenden Stücke zusammengefügt wie in Figur 1b tatsächlich ein Rechteck ergeben?
   Trugschluss: Wird ein Quadrat mit Seitenlänge $f_n \overset{\text{z.B.}}{=} 8$ im Verhältnis von $f_{n-1} = 5$ und $f_{n-2} = 3$ unterteilt, ergibt sich nur scheinbar ein Rechteck (Figur 1c). Dies äussert sich darin, dass zwischen Scheinrechteck und Quadrat der Flächenunterschied $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = 13 \cdot 5 - 8^2 = 1$ besteht!



Figur 1 (a links, b oben, c unten) (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. Man kann aus den 20 Ecken eines **regulären Dodekaeders** (Figur 2) 8 so auswählen, dass sie einen Innenwürfel bilden (Skizzieren Sie den Innenwürfel!). Die Würfelkanten sind dann stets Fünfeck-Diagonalen. In dieser Aufgabe berechnen Sie das Volumen des Dodekaeders mit Kantenlänge $a = 1$, indem Sie es als Würfel mit auf den Würfelseitenflächen aufgesetzten 'Walmdächern' auffassen. (Lassen Sie in Ihrer Rechnung $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\ldots$ stehen, vereinfachen Sie aber soweit als möglich mithilfe von $\phi^2 = \phi + 1$ und $\phi^3 = 2\phi + 1$.)

   (a) Welchen Volumeninhalt besitzt der Innenwürfel? [Lösung: $2\phi + 1$]

   (b) Wie hoch sind die auf den Würfelseitenflächen aufgesetzten Walmdächer? [Lösung: $\frac{1}{2}$]

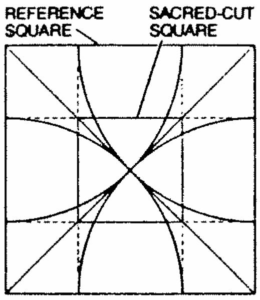
   (c) Wie gross ist der Volumeninhalt eines Walmdaches? [Lösung: $\frac{1}{4}\phi + \frac{1}{6}$]

   (d) Welchen Volumeninhalt ergibt sich für das Dodekaeder? [Lösung: $(\frac{7}{2}\phi + 2)a^3 \approx 7.66a^3$]

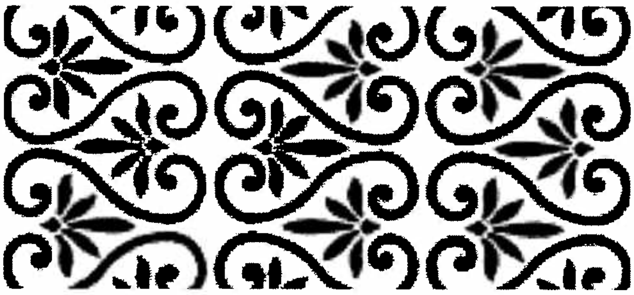
3. Ausgrabungen in OSTIA (Hafenstadt des antiken Roms) deuten auf ein Proportionensystem hin, welches dort im Grossen bis hin zum Kleinen zur Anwendung kam [Kappraff, S. 30]. Man spricht vom **heiligen Schnitt**. Ein nach dem heiligen Schnitt geteiltes Referenzquadrat wird wie folgt konstruiert: Um jede Quadratecke wird der Kreisbogen durch die Quadratmitte gezogen. Durch Verbinden der Schnittpunkte der Kreisbogen mit den Quadratseiten entsteht in der Mitte ein massstäblich verkleinertes Quadrat, das so genannte *heilig-Schnitt-Quadrat* (Figur 3).

(a) Wie gross ist das Seitenlängenverhältnis von Referenz- und heilig-Schnitt-Quadrat?

(b) Im Referenzquadrat mit Seitenlänge a wird das heilig-Schnitt-Quadrat gezeichnet. Anschliessend wird das heilig-Schnitt-Quadrat als neues Referenzquadrat aufgefasst und darin wiederum das heilig-Schnitt-Quadrat gezeichnet, und immer so weiter. Wie gross ist der Flächeninhalt von dem Ausgangsquadrat und allen unendlich vielen heilig-Schnitt-Quadraten zusammen? (Die Endlichkeit der Summe sei vorausgesetzt.)



Figur 3 (Aufgabe 3)



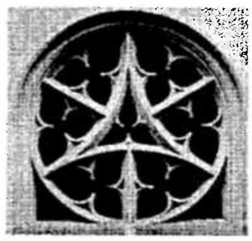
Figur 4 (Aufgabe 4)

4. Figur 4 zeigt ein **Bandornament** (**Fries**). Man muss sich die Figur nach links und nach rechts bis ins Unendliche fortgesetzt denken. Zählen Sie alle (von der Identität verschiedenen)
   (a) Translationen (zugehörige Vektoren formal angeben, kleinsten Vektor $\vec{v}$ einzeichnen)
   (b) Geradenspiegelungen (zugehörige Symmetrieachsen in den Ausschnitt einzeichnen)
   (c) Rotationen (zugehöriger Drehwinkel angeben und Drehzentren in den Ausschnitt eintragen)
   (d) Gleitspiegelungen (zugehörige Translationsvektoren und Spiegelungsgeraden formal angeben)

   auf, die das Bandornament mit sich selbst zur Deckung bringen, d.h. die Symmetrietransformationen des Bandornaments sind. Geben Sie in (b) bzw. (c) ferner an, wie gross der Abstand zweier benachbarter Symmetrieachsen bzw. Drehzentren ist, wenn v die Länge des kleinsten Vektors aus (a) bezeichnet.

5. Bezeichne Symm(Ω) die Menge aller Symmetrietransformationen der **Figur** Ω. (Ein Fenster der Zisterzienserabtei HAUTERIVE im Kanton Freiburg)

   (a) Übertragen Sie Ω (vereinfacht, nur Kreisinneres!) in Ihre Unterlagen und ermitteln Sie Symm(Ω). (Bezeichnungen einführen)
   (b) Stellen Sie von Symm(Ω) die zugehörige Gruppentafel auf.
   (c) Zählen Sie alle möglichen Gruppen (inkl. Symm(Ω)) auf, die sich durch Kombination von Elementen aus Symm(Ω) bilden lassen. Skizzieren Sie zu jeder Gruppe ein Dreieck, welches diese Symmetriegruppe besitzt.



Figur Ω

6. **Abstrakte Gruppen**: Welche der folgenden Zahlenmengen bilden bezüglich der Zahlen-Multiplikation (Zeichen $\cdot$) eine Gruppe? Ist die Gruppe endlich oder unendlich, kommutativ oder nicht-kommutativ?

$\mathbb{E} = \{1, 11, 111, 1111, \dots\}$	Menge der Einerziffer Zahlen
$\$ = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$	Menge der Stammbrüche
$\mathbb{M} = \{-1, 1\}$	Menge aus Eins und Minuseins
$\mathbb{P} = \{\dots, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, \dots\}$	Menge der ganzen Potenzen von 2

Verifizieren Sie im Falle einer Gruppe alle Gruppenaxiome, anderenfalls genügt es, das 'erste', nicht erfüllte Gruppenaxiom anzugeben und anhand eines Zahlen-Beispiels zu verdeutlichen.

1 (a) $f_3\cdot f_1 - f_2^2 = 2\cdot 1 - 1^2 = 1$ ✓. $\quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ① $, \quad f_{n-1} = f_n - f_{n-2}$ ②

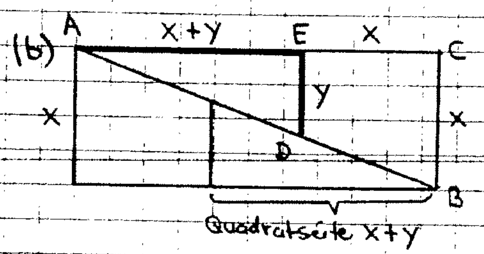
$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 \underset{①}{=} (f_n + f_{n-1})f_{n-1} - f_n^2 = f_n f_{n-1} + f_{n-1}^2 - f_n^2 \underset{②}{=} f_n(f_n - f_{n-2}) + f_{n-1}^2 - f_n^2$$

Serie 4
SS2007

$$= \cancel{f_n^2} - f_n f_{n-2} + f_{n-1}^2 - \cancel{f_n^2} = -(f_n f_{n-2} - f_{n-1}^2) \underset{\text{ebenso}}{=} -(-(f_{n-1}f_{n-3} - f_{n-2}^2))$$

$$= \dots = (-1)^{n-2}(f_3\cdot f_1 - f_2^2) = (-1)^n\cdot(-1)^{-2}\cdot 1 = (-1)^n$$

(b)



ΔADE ist eine massstäbl. Verkleinerung des ΔABC

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|} \leftrightarrow \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|BC|} \quad \text{d.h.} \quad \frac{x+y}{y} = \frac{x+y+x}{x}$$

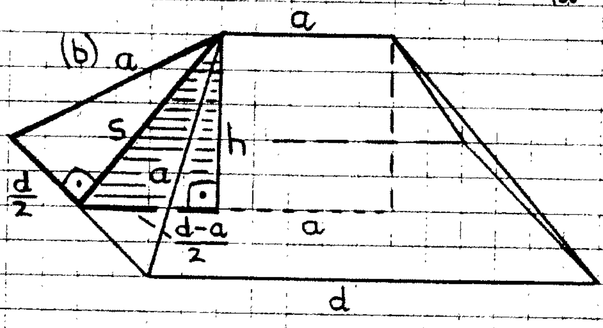
$$\frac{x}{y} + \cancel{1} = \cancel{1} + \frac{y}{x} + 1 \quad \| \cdot \frac{x}{y} \quad \leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{x}{y}$$

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$, quad. Glch. für Verhältnis $\frac{x}{y} \rightsquigarrow \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ↯\right)$ Goldener Schnitt!

2 (a) Diagonale d und Fünfeckseite $a = 1$ stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander

$$\frac{d}{a} = \phi \rightsquigarrow d = \phi\cdot a = \phi, \quad V_{Würfel} = d^3 = \phi^3 = 2\phi + 1$$

(b)

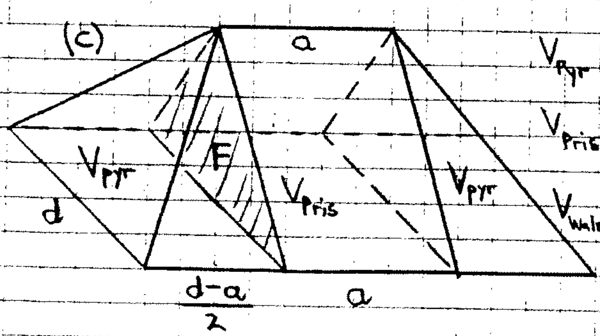


$$s^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\phi^2}{4}, \quad (a = 1, d = \phi)$$

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\phi^2}{4} - \frac{(\phi-1)^2}{4} = 1 - \frac{\phi^2}{4} - \frac{\phi^2}{4} + \frac{\phi}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{\phi}{2} - \frac{\phi^2}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\phi}{2} - \frac{\phi+1}{2} = \frac{1}{4} \rightsquigarrow h = \frac{1}{2}$$

(c)



$$V_{Pyr} = \frac{1}{3}G\cdot h = \frac{1}{3}d\cdot\frac{(d-a)}{2}\cdot h = \frac{1}{6}\phi(\phi-1)\cdot\frac{1}{2}$$

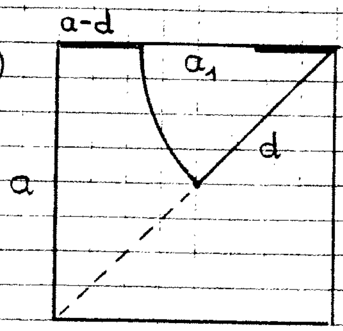
$$V_{Pris} = F\cdot a = \frac{1}{2}d\cdot h\cdot a = \frac{1}{2}\phi\cdot\frac{1}{2}$$

$$V_{Walm} = 2V_{Pyr} + V_{Pris} = \frac{1}{6}\phi(\phi-1) + \frac{\phi}{4} = \frac{1}{6}\phi^2 - \frac{1}{6}\phi + \frac{\phi}{4}$$

$$= \frac{1}{6}(\phi+1) - \frac{1}{6}\phi + \frac{\phi}{4} = \frac{1}{6} + \frac{\phi}{4}$$

(d) $V_{Dode} = V_{Würfel} + 6V_{Walm} = 2\phi + 1 + 6\left(\frac{1}{6} + \frac{\phi}{4}\right) = 2\phi + 1 + 1 + \frac{3}{2}\phi = \frac{7}{2}\phi + 2$

3 (a)



$$d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$a_1 = a - 2(a-d) = a - 2a + 2d = 2d - a = \sqrt{2}a - a = (\sqrt{2}-1)a$$

Verhältnis: $\frac{a_1}{a} = \sqrt{2} - 1$ (≈ 0.414)

(b) $a_1 = \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\lambda:\ \text{Längenfaktor}} \cdot a\ ,\ a_2 = \lambda a_1\ ,\ a_3 = \lambda a_2\ , \dots$ schrittweise massstäbl. Verkleinerung

$$F = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots = a^2 + \lambda^2 a^2 + \lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \dots = a^2 + \lambda^2 \underbrace{\left[a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots\right]}_{F}$$

$$F = a^2 + \lambda^2 F \;\leftrightarrow\; F - \lambda^2 F = a^2 \;\leftrightarrow\; F(1-\lambda^2) = a^2$$

$$F = \frac{a^2}{1-\lambda^2} = \frac{a^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{a^2}{1-(2-2\sqrt{2}+1)} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}-2} = \frac{a^2}{2(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{2}+1)$$

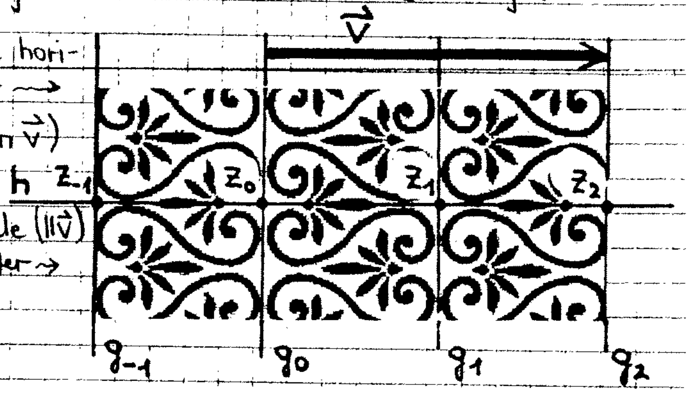
---

(4) Die horizontale unendliche Ausdehnung des Bandornaments hat zur Folge:

(a) als Translationsrichtung kommt nur die horizontale Richtung in Frage. Periodisches Muster $\rightsquigarrow$ $T_{\vec{w}}$ mit $\vec{w} = n\vec{v}$ (ganzzahlige Vielfache von $\vec{v}$) d.h. $\dots, -2\vec{v}, -\vec{v}, \vec{v}, 2\vec{v}, \dots$

(b) als Symmetrieachsen kommen nur Mittelparallele ($\parallel \vec{v}$) oder Vertikale ($\perp \vec{v}$) Geraden in Frage. Muster $\rightsquigarrow$ S_h ; $\dots, S_{g_{-1}}, S_{g_0}, S_{g_1}, \dots$

Abstand benachbarter g_k, g_{k+1} : $\frac{v}{2}$



(c) als Drehwinkel kommt nur 180° in Frage, als Drehzentren nur Punkte auf Mittelparallele h Muster $\rightsquigarrow$ Halbdrehungen (Punktspiegelungen) $\dots, R_{Z_{-1}}, R_{Z_0}, R_{Z_1}, \dots$; $|Z_k Z_{k+1}| = \frac{v}{2}$

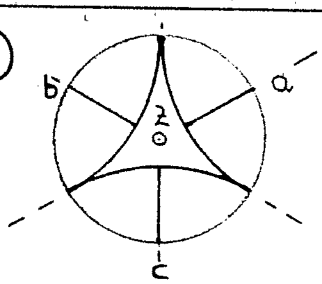
(d) Gleitspiegelungen $S_h \circ T_{\vec{w}}$ mit Translationsvektor $\vec{w} = n\vec{v}$ ($n \in \mathbb{Z}$) und Sp.gerade h

Gleitspiegelungen mit Spiegelungsachsen $\perp$ h lassen sich auf reine Geradenspieg. reduzieren!

z.B. $S_{g_1} \circ T_{\vec{v}} = S_{g_0}$ (gleiche Zuordnung)

---

(5)

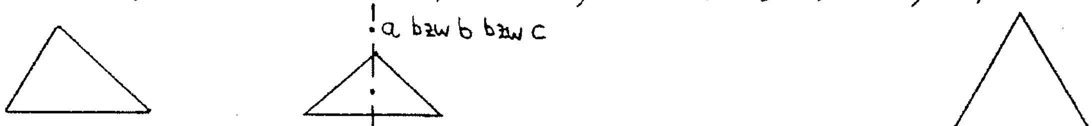


(a) $\mathrm{Symm}(\Omega) = \{I, R_{Z,120°}, R_{Z,240°}, S_a, S_b, S_c\} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{D}_3$

(b)

$\circ$	I	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	S_a	S_b	S_c
I	I	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	S_a	S_b	S_c
$R_{Z,120°}$	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	I	S_c	S_a	S_b
$R_{Z,240°}$	$R_{Z,240°}$	I	$R_{Z,120°}$	S_b	S_c	S_a
S_a	S_a	S_b	S_c	I	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$
S_b	S_b	S_c	S_a	$R_{Z,240°}$	I	$R_{Z,120°}$
S_c	S_c	S_a	S_b	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	I

(c) $\{I\}$; $\{I, S_a\}, \{I, S_b\}, \{I, S_c\}$; $\{I, R_{Z,120°}, R_{Z,240°}\}$; $\mathrm{Symm}(\Omega)$



allg. Dreieck — gleichschenkliges Dreieck — gibt keines — gleichseitiges Dreieck

---

(6) $\mathbb{E}$ keine Gruppe, denn $s, t \in \mathbb{E}$: $s \cdot t$ im allg. keine Einerziffer Zahl, z.B. $11 \cdot 11 = 121$ ↯ (G1)

$ keine Gruppe, denn $t \in \$$: $t \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot t = 1$ (Neutralelement) $\rightsquigarrow t^{-1} = \frac{1}{t}$ kein Stammbruch ↯ (G4)

$\mathbb{M}$ endl. kommutative Gruppe

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Verknüpfungstafel bestätigt (G1), (G3), (G4), (KG)

(G2) gilt für $\mathbb{R}_\phi$, erst recht also für $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}_\phi$

$\mathbb{P}$ unendl. kommutative Gruppe: (G1) Für $2^n, 2^m \in \mathbb{P}$ ist $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$ auch 2er-Potenz;

(G2) $(2^n \cdot 2^m) \cdot 2^k = 2^{n+m+k} = 2^n (2^m \cdot 2^k)$ (G3) $1 = 2^0 \in \mathbb{P}$ mit $2^n \cdot 1 = 2^n$ (G4) zu $2^n \in \mathbb{P}$ ist $\frac{1}{2^n} = 2^{-n} \in \mathbb{P}$ mit $2^n \cdot 2^{-n} = 1$

(KG) $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} = 2^m \cdot 2^n$