Übungsserie 1

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 26. Oktober 2007** in der Vorlesung

1. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Kurve** γ beschrieben

$$\gamma: \; [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein ebenes Koordinatensystem (Anfangs- und Endpunkt beachten!). Berechnen Sie ferner die Koordinaten der Schnittpunkte von γ mit den Koordinatenachsen.

   (b) Bestimmen Sie die Gleichung von γ in der Form $y = f(x)$.

   (c) Geben Sie eine Darstellung von γ mit Parameter $t^\star$ und Parameterbereich $[0,1]$ an, so dass die Kurve in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

2. Die Projektion der **Raumkurve** γ auf die (x,y)-Ebene ist eine Ellipse mit Halbachsen der Längen 2 und 4, die auf der x- bzw. auf der y-Achse liegen. Die Projektion von γ auf die (x,z)-Ebene ist ebenfalls eine Ellipse jedoch mit Halbachsen der Längen 2 und 3, wobei letztere auf der z-Achse liegt.

   (a) Wie lautet eine Parameterdarstellung einer solchen Kurve γ?

   (b) Skizzieren Sie ferner die Projektion γ'' von γ auf die (y,z)-Ebene (Aufriss) in ein (y,z)-Koordinatensystem.

   (c) In welchen Punkten durchstösst die Raumkurve γ die 'vordere' Parallelebene zur (y,z)-Ebene mit Abstand $\sqrt{3}$? (Geben Sie die t-Werte und die Koordinaten der betreffenden Punkte an.)

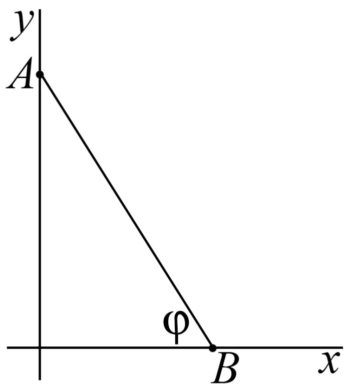
3. Die **Leiter** AB mit der Länge l steht auf dem horizontalen Boden (x-Achse) und lehnt an eine dazu senkrechte Hauswand (y-Achse). Die Leiter beginnt aus ihrer anfänglich vertikalen Lage langsam zu rutschen, so dass ihr oberes Ende A auf der y-Achse nach unten und ihr unteres Ende B auf der x-Achse nach aussen gleitet (Figur).

   Benutzen Sie den Parameter φ und ermitteln Sie damit eine Parameterdarstellung der Bahnkurve

   (a) von der Leitermitte M

   (b) von einem Punkt S (Leitersprosse), der vom unteren Leiterende B den Abstand b ($b < \frac{l}{2}$) hat.

   (c) Um was für eine Kurve handelt es sich bei (a) bzw. (b)? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente.)



4. **Ableitungstraining:** Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

(a) $x(t) = 4t$	(b) $y(t) = 1 + 3t$	(c) $x(t) = R\sin\left(\frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}\,t\right)$
(d) $y(t) = at\sin t$	(e) $x(t) = tR\cos\varphi$	(f) $x(\varphi) = tR\cos\varphi$
(g) $z(t) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi$	(h) $z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi$	(i) $x(\varphi) = e^\varphi\cos\varphi$

Übungsserie 1

5. Rollt ein Kreis vom Radius R in der (x, y)-Ebene auf der x-Achse in positiver Richtung, beschreibt ein mit dem Kreis fest verbundener Punkt P eine Kurve γ, eine so genannte **gewöhnliche Zykloide** (Figur 2).

   (a) Wie lautet eine Parameterdarstellung von γ, wenn P zu Beginn im Ursprung O liegt?

   (b) Skizzieren Sie den ungefähren weiteren Verlauf der Kurve γ ($R = 1.5$ cm). Achten Sie auf Symmetrien, Spitzen und die Abstände zwischen den Spitzen.)

   Die Zykloide spielt in der Natur und Technik eine herausragende Rolle. (Für die an der x-Achse nach unten gespiegelte Kurve gilt:) Sie ist diejenige Kurve, auf der ein reibungsfrei gleitender Körper am schnellsten von einem Punkt O zu einem schräg darunter liegenden Punkt P gelangt. Ferner ist sie diejenige Kurve, auf welcher ein reibungsfrei gleitender Körper immer gleich lang bis zum tiefsten Punkt hat, egal von welcher Höhe er beginnt.

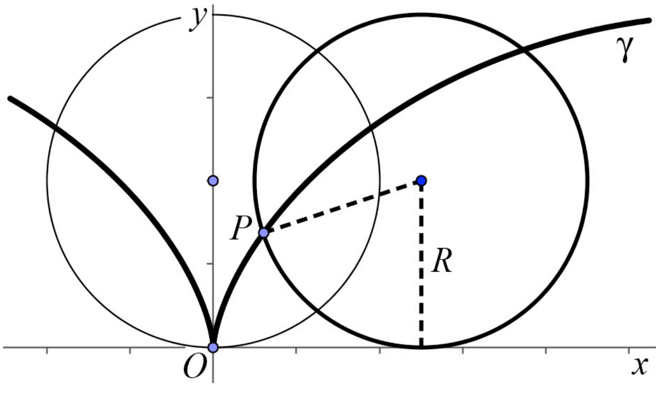
6. Eine Stange steckt unter dem Neigungswinkel 45° im horizontalen Boden. Eine **Kugel** vom Radius R wird nun auf dem Boden liegend so um die Stange herumgeführt, dass sie die Stange stets berührt (Figur 3). Dabei beschreibt der Kugelmittelpunkt M eine ebene, geschlossene Kurve γ mit dem Symmetriezentrum O. Im Folgenden wird die senkrechte Projektion der Stange auf die Kurvenebene als x-Achsenrichtung gewählt, als Ursprung wird O festgelegt.

   (a) Wie gross ist der grösste bzw. der kleinste Abstand von M bezüglich O?

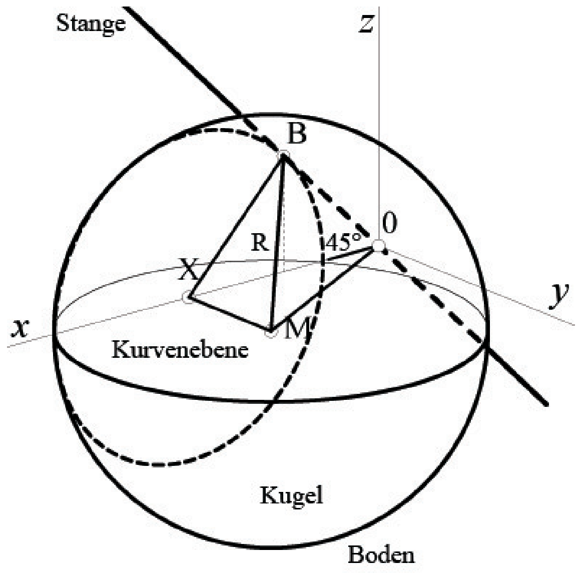
   (b) Die Kugel berührt die Stange im Punkt B und hat mit der (x, z)-Ebene den Schnittkreis k gemeinsam. Der Mittelpunkt von k wird mit X bezeichnet. Begründen Sie, dass stets gilt: $|OX| = \sqrt{2} \cdot |OB|$.

   (c) Der Kugelmittelpunkt hat die Koordinaten $M = (x, y)$. Leiten Sie eine Gleichung in x und y für die Kurve γ her. (Tipp: Betrachten Sie dazu das Dreieck MOB.) Um was für eine Kurve handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente.)

   (d) γ lässt sich auch als ebener Schnitt einer Zylinderfläche auffassen. Geben Sie den Zylinder und die Schnittebene an.

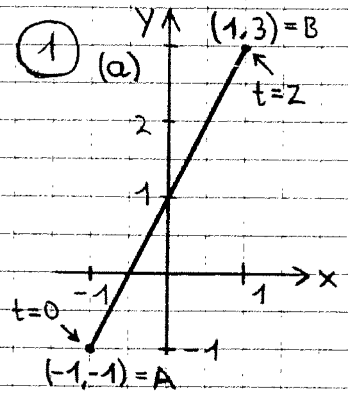


Figur 2 (Aufgabe 5)



Figur 3 (Aufgabe 6)

1 (a)



$\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \overset{soll}{=} \begin{pmatrix}t-1\\2t-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow t=1$, in $y(t)$: $y=2\cdot1-1=1$ $\quad\Big\|\quad$ $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \overset{soll}{=} \begin{pmatrix}t-1\\2t-1\end{pmatrix} \to t=\frac{1}{2}$, in $x(t)$: $x=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

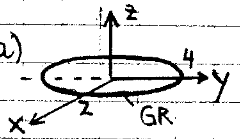
Schnittpunkte: $\underline{\underline{(0,1)}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{(-1/2,\ 0)}}$

(b) $x(t)=t-1 \to t=x+1$, in $y(t)$: $\underline{\underline{y}}=2(x+1)-1=\underline{\underline{2x+1}}$
$y(t)=2t-1$

(c) $\vec{OP}=\vec{OB}+t^*\cdot\vec{BA}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t^*\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2t^*\\3-4t^*\end{pmatrix}$, $\underline{\underline{[0,1]\to\mathbb{R}^2,\ t^*\mapsto\vec{r}(t^*)=\begin{pmatrix}1-2t^*\\3-4t^*\end{pmatrix}}}$

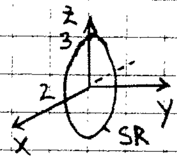
---

2 (a)



Ellipse mit $a=2, b=4$

$\begin{pmatrix}a\cos t\\b\sin t\\\dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos t\\4\sin t\\\dots\end{pmatrix}$

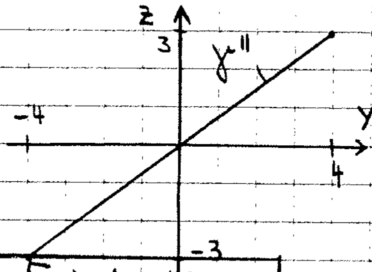


Ellipse mit 2,3

$\begin{pmatrix}2\cos t\\\dots\\3\sin t\end{pmatrix}$

$\gamma: [0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ t\mapsto\vec{r}(t)=\underline{\underline{\begin{pmatrix}2\cos t\\4\sin t\\3\sin t\end{pmatrix}}}$

(b) $y=4\sin t \rightsquigarrow \sin t=\frac{1}{4}y$
$z=3\sin t$ $\quad$ in z: $z=\frac{3}{4}y$



(Räumliche Darstellung ähnlich wie Figur 1.8 im Skript)

Es gibt eine 2. Lösung, siehe Ende der Lösung

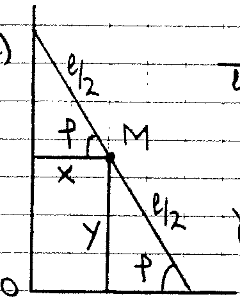
(c) $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\y\\z\end{pmatrix}\overset{soll}{=}\begin{pmatrix}2\cos t\\4\sin t\\3\sin t\end{pmatrix} \to \cos t=\sqrt{3}/2$
$\underline{\underline{t_1=\frac{\pi}{6}}},\ \underline{\underline{t_2=\frac{11\pi}{6}}}$

in $y(t)=4\sin(t_1)=2$ bzw. $4\sin(t_2)=-2$
in $z(t)=3\sin(t_1)=1.5$ bzw. $=-1.5$

Durchstosspte: $\underline{\underline{(\sqrt{3},2,1.5)}}$ und $\underline{\underline{(\sqrt{3},-2,-1.5)}}$

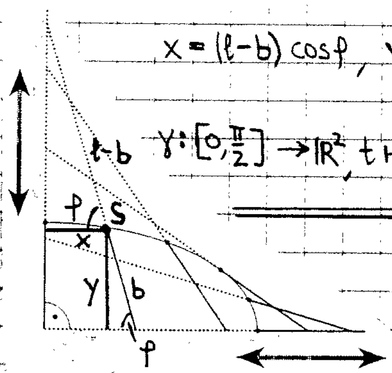
---

3 (a)



$\frac{x}{l/2}=\cos\varphi,\ \frac{y}{l/2}=\sin\varphi$
$x=\frac{l}{2}\cos\varphi,\ y=\frac{l}{2}\sin\varphi$

$\underline{\underline{\gamma: [0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^2,\ t\mapsto\vec{r}(\varphi)=\begin{pmatrix}\frac{l}{2}\cos\varphi\\\frac{l}{2}\sin\varphi\end{pmatrix}}}$



$x=(l-b)\cos\varphi,\ y=b\cdot\sin\varphi$

$\underline{\underline{\gamma: [0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^2,\ t\longmapsto\vec{r}(\varphi)=\begin{pmatrix}(l-b)\cos\varphi\\b\sin\varphi\end{pmatrix}}}$

(c) Bei (a): (Viertel) Kreis mit Mittelpunkt 0, Radius $l/2$

Bei (b): (Viertel) Ellipse mit Mittelpunkt 0 und Halbachsen $a=l-b$, b

---

Zur Erinnerung die Regeln:

① $(x^n)'=nx^{n-1}$, speziell: $(x^1)'=1\cdot x^0=1$, $(\text{Zahl})'=0$
② $(f+g)'=f'+g'$
③ $(\cos x)'=-\sin x$, $(\sin x)'=\cos x$
④ Kettenregel $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot\underbrace{g'(x)}_{\text{innere Abl}}$
⑤ Produktregel $(f\cdot g)'=f'g+fg'$

4 (a) $x'(t)=(4t)'\overset{①}{=}4\cdot1=\underline{4}$

(b) $y'(t)=(1+3t)'\overset{②}{=}(1)'+(3t)'\overset{①}{=}0+3\cdot1=\underline{3}$

(c) $x'(t)=\Big(R\underbrace{\sin}_{f}\underbrace{\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)}_{g}\Big)'\overset{③}{\underset{④}{=}}R\underbrace{\cos}_{f'}\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)'}_{\text{innere Abl}}\overset{①}{=}R\cos\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)\cdot\underbrace{\frac{2\pi}{60s}}_{g'}=\underline{\underline{\frac{2\pi R}{60s}\cos\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)}}$

(d) $y'(t)=(a\underbrace{t\sin t}_{f\cdot g})'\overset{⑤}{=}a\big[\underbrace{(t)'\sin t}_{f'\cdot g}+\underbrace{t\cdot(\sin t)'}_{f\cdot g'}\big]\overset{①}{\underset{③}{=}}a\left[1\cdot\sin t+t\cos t\right]=\underline{a\sin t+at\cos t}$

(e) $x'(t)=(tR\cos\varphi)'=R\cos\varphi\cdot(t)'=\underline{\underline{R\cos\varphi}}$ $\qquad$ (f) $x'(\varphi)=(tR\cos\varphi)'=tR(\cos\varphi)'\overset{③}{=}\underline{\underline{-tR\sin\varphi}}$

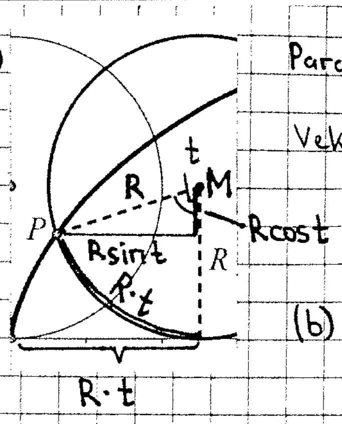
④ (g) $z'(t) = \left(\frac{h}{2\pi}\varphi\right)' = \frac{h}{2\pi}\varphi\cdot\underbrace{(1)'}_{=0} \overset{①}{=} \underline{\underline{0}}$ (h) $z'(\varphi) = \left(\frac{h}{2\pi}\varphi\right)' = \frac{h}{2\pi}(\varphi)' \overset{①}{=} \frac{h}{2\pi}\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{h}{2\pi}}}$

(i) $x'(\varphi) = [\underbrace{e^\varphi}_{f}\underbrace{\cos\varphi}_{g}]' \overset{⑤}{=} \underbrace{(e^\varphi)'}_{f'}\underbrace{\cos\varphi}_{g} + \underbrace{e^\varphi}_{f}\underbrace{(\cos\varphi)'}_{g'} \overset{③}{=} e^\varphi\cos\varphi + e^\varphi(-\sin\varphi) = \underline{\underline{e^\varphi\cos\varphi - e^\varphi\sin\varphi}}$

(da $(e^\varphi)' = e^\varphi$)

---

⑤ (a)

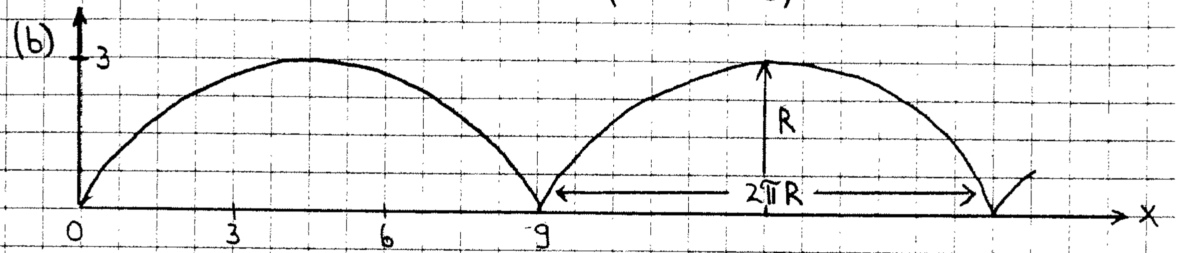


Parameter t: Wälzwinkel, Mittelpunkt $M = (R\cdot t, R)$ ($R\cdot t \;\hat{=}\;$ Bogenlänge)

Vektor $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rt - R\sin t \\ R - R\cos t \end{pmatrix}$

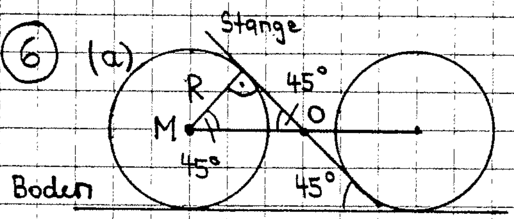
$\gamma: [0,\infty[\to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} Rt - R\sin t \\ R - R\cos t \end{pmatrix}$

(b)



---

⑥ (a)



grösster Abstand: Im gleichschenkligen, rechtwinkligen 45°-45°-Δ:

$|OM| = \sqrt{R^2+R^2} = \sqrt{2R^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}R}}$

Kleinster Abstand: $|OM| = \underline{\underline{R}}$

(b) OB ist Tangente an den Schnittkreis K $\rightsquigarrow$ XB ⊥ OB, Δ XOB ist ein 45°-45°-90°-Δ,

d.h. gleichschenklig: $|OX|^2 = |OB|^2 + \underbrace{|XB|^2}_{=|OB|} = 2|OB|^2$, also $|OX| = \sqrt{2}\,|OB|$

(c) Im ⊥ ΔOXM gilt: $|OM|^2 = |OX|^2 + |XM|^2 = x^2 + y^2$ ①

OB ist Tangente an die Kugel $\rightsquigarrow$ MB ⊥ OB, ΔMOB ist rechtwinklig

$$\underbrace{|OM|^2}_{① \ x^2+y^2} = \underbrace{|MB|^2}_{R} + \underbrace{|OB|^2}_{ⓑ \ |OX|/\sqrt{2} = \frac{x}{\sqrt{2}}} \quad \longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = R^2 + \frac{x^2}{2} \quad \| -\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = R^2 \quad \| : R^2$$

$$\frac{x^2}{2R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \qquad \text{Vgl. mit } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

γ ist eine Ellipse mit Mittelpunkt O und Halbachsen $a = \sqrt{2}R$ (grösster Abstand)
$b = R$ (kleinster Abstand)

(d) M hat stets den Abstand R von der Stange $\rightsquigarrow$ M liegt auf der Zylinderfläche mit der Stange als Zyl. achse und dem Radius R

M hat stets den Abstand R vom Boden $\rightsquigarrow$ M liegt in der Parallelebene zum Boden mit Abstand R

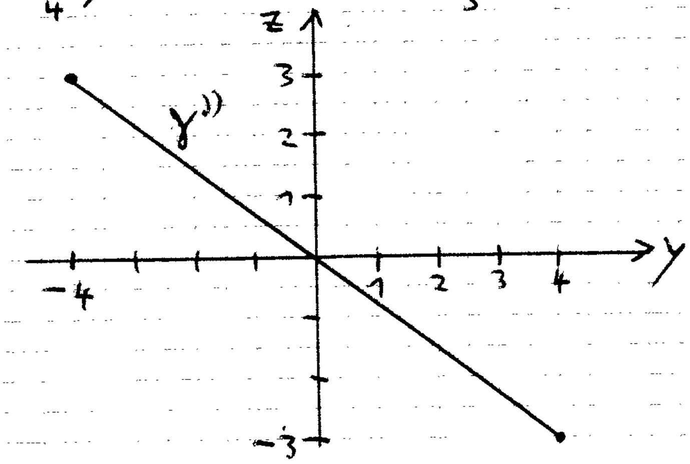
(also liegt M auf der Schnittkurve von Parallelebene und Zylinderfläche. Dies ist eine Ellipse!)

② 2. Lösung: räumliche Ellipse an xz-Ebene gespiegelt

(a)

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 4\sin t \\ -3\sin t \end{pmatrix}$$

(b) $\frac{1}{4}y = \sin t = -\frac{z}{3} \Rightarrow z = -\frac{3}{4}y \;, -4 \leq y \leq 4$



(c) $t_1 = \frac{\pi}{6} \;, t_2 = \frac{11\pi}{6} \rightsquigarrow$ Durchstosspunkte $(\sqrt{3}, 2, -1.5)$

$(\sqrt{3}, -2, 1.5)$