# Übungsserie 3

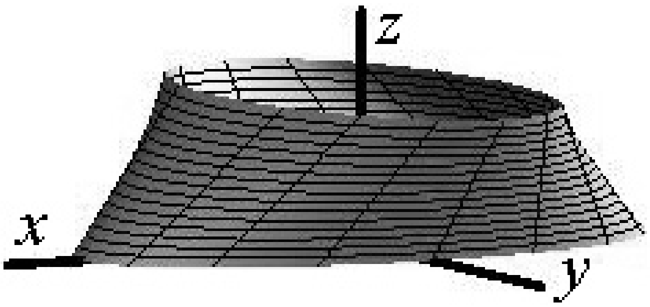
**Abgabe** der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 22. Februar 2008** in der Vorlesung

1. Die folgende Parameterdarstellung beschreibt die **Fläche** $S$ in Figur 1

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) := \begin{pmatrix} (2-t)\cos\varphi \\ (1+t)\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi \, , \, 0 \le t \le 1)$$

   a) Was für Kurven sind die $\varphi$- bzw. die $t$-Linien?

   b) Ist $S$ eine Regelfläche? Ist $S$ abwickelbar? (Kurze Begründungen ohne Rechnung)




Figur 1 (Aufgabe 1)

2. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** $S$ beschrieben

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) := \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi \, , \, 0 \le t < \infty)$$

   a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die Fläche $S$ durch ein angedeutetes Netz von $\varphi$- und $t$-Linien. Was für Kurven sind die $\varphi$- bzw. $t$-Linien?

   b) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in $x$, $y$ und $z$) der Fläche $S$ her.

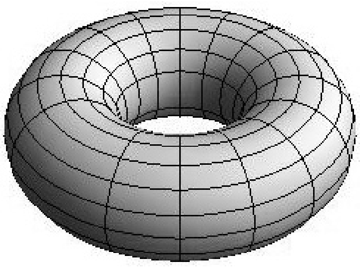
   c) Berechnen Sie den Normalenvektor im allg. Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$ und in $\vec{r}(0,0)$.

3. Figur 2 zeigt einen **Torus** (Röhrenfläche vom Radius $R$ um eine kreisförmige 'Mittellinie' vom Radius $2R$)

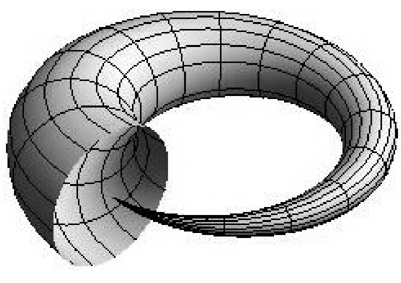
   a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und finden Sie eine Parameterdarstellung der Fläche mit den Parametern $\varphi$ und $t$. (Tipp: Vgl. Bsp. 1.18 *Möbiusband* im Skript zur Vorlesung)

   b) Ändern Sie die Parameterdarstellung aus Teilaufgabe (a) so ab, dass der 'Röhrenradius' in einem Umlauf von 0 linear auf $R$ zunimmt (Figur 3).

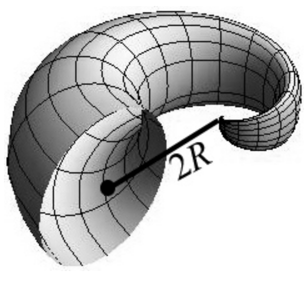
   c) Ändern Sie die Parameterdarstellung aus (b) so ab, dass der Radius der 'Mittellinie' in einem Umlauf von 0 linear auf $2R$ zunimmt (Figur 4).



Figur 2 (Aufgabe 3a)



Figur 3 (Aufgabe 3b)




Figur 4 (Aufgabe 3c)

# Übungsserie 3

4. In dieser Aufgabe **generieren** Sie eine **Fläche** $S$ durch Bewegen und Verkleinern der Kurve $\gamma$. $\gamma$ ist ein horizontaler Kreis mit Mittelpunkt in $(0, 0, 2)$ und Radius 1.

   a) Wie lautet eine Parameterdarstellung des Kreises $\gamma$?

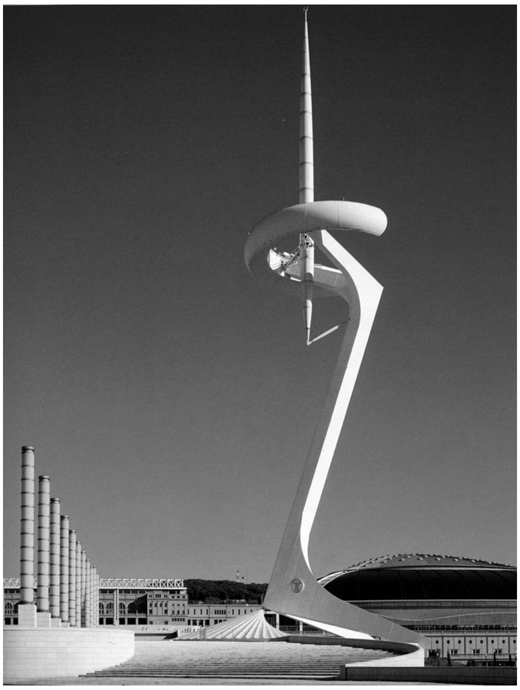
   b) Wird der Kreis $\gamma$ in gleichbleibender horizontaler Lage vertikal nach unten bis nach $(0, 0, 0)$ verschoben und dabei gleichmässig verkleinert (d.h. der Radius nimmt linear auf 0 ab), überstreicht er eine Fläche $S$. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von $S$.

   c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in $x$, $y$ und $z$) der Fläche $S$ her.

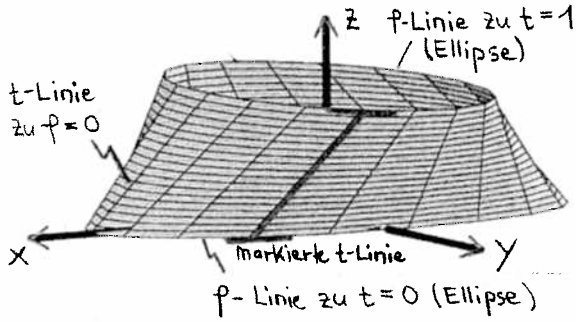
   d) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$ .

   e) Ist $S$ eine Regelfläche? (Kurze Begründung mithilfe der Parameterdarstellung aus Teilaufgabe (b))
   Ist die Fläche $S$ abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem Resultat aus Teilaufgabe (d))

Die Abbildung zeigt Calatrava's *Montjuic Communications Tower* in Barcelona, Spain, 1989-92.



**(1)**




(a) φ-Linien: (horizontale) Ellipsen mit Mittelpunkt auf der z-Achse

$$\begin{pmatrix}(2-t)\cos\varphi\\(1+t)\sin\varphi\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\varphi\\b\sin\varphi\\z\end{pmatrix}$$ mit $\left.\begin{matrix}a=2-t\\b=1+t\end{matrix}\right\}$ Längen der Halbachsen, $z=t$ (Höhe)

t-Linien: Geradenstücke

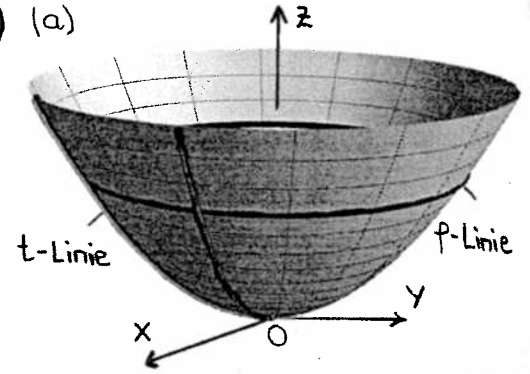
denn: $$\begin{pmatrix}2\cos\varphi-t\cos\varphi\\\sin\varphi+t\sin\varphi\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\\sin\varphi\\1\end{pmatrix}$$ Parameterdrst einer Geraden

(b) S entsteht durch Bewegung einer Geraden im Raum ⇝ Schar gerader Linien: Regelfläche

S ist nicht abwickelbar. Die Tangentialebene entlang der t-Linien (z.B. die markierte) ist im allg. nicht konstant, sie "dreht" sich (da sich die Ellipse "dreht")

---

**(2)** (a)




φ-Linien: (horizontale) Kreise mit Mittelpunkt auf der z-Achse
t-Linien: (Halb) Parabeln mit Scheitel in O (vertikal stehend)

(b) $x=t\cos\varphi\ ,\ y=t\sin\varphi\ ,\ z=t^2$

$$x^2+y^2=\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{\equiv 1}t^2=z\ \rightarrow\ \underline{\underline{x^2+y^2=z}}$$

(c) $$\vec{s}=\vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0)=\begin{pmatrix}-t_0\sin\varphi_0\\t_0\cos\varphi_0\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{t}=\vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0)=\begin{pmatrix}\cos\varphi_0\\\sin\varphi_0\\2t_0\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{t}=\begin{pmatrix}\cancel{-t_0\sin\varphi_0}\\t_0\cos\varphi_0\\0\\-t_0\sin\varphi_0\\t_0\cos\varphi_0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cancel{\cos\varphi_0}\\\sin\varphi_0\\2t_0\\\cos\varphi_0\\\sin\varphi_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t_0^2\cos\varphi_0\\2t_0^2\sin\varphi_0\\\underbrace{-t_0\sin^2\varphi_0-t_0\cos^2\varphi_0}_{-t_0(\sin^2\varphi_0+\cos^2\varphi_0)\equiv -t_0}\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}2t_0^2\cos\varphi_0\\2t_0^2\sin\varphi_0\\-t_0\end{pmatrix}}}\ \overset{t_0=0,\ \varphi_0=0}{=}\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

In (0,0,0) versagt diese Vorgehensweise bei dieser Par'drst. Die Anschauung zeigt: $\vec{n}_0=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}}}$

---

**(3)** (a) Koord. system: Ursprung in der Torusmitte, z-Achse auf der Torusachse (Symmetrieachse)

Analog Bsp 1.18 (Skript S. 36): Mittelpunkt $M_\varphi$ auf der Mittellinie: $M_\varphi=(2R\cos\varphi, 2R\sin\varphi, 0)$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$

Gedrehter Punkt A um Winkel t um $M_\varphi$: $A_t=((2R-R\cos t)\cos\varphi, (2R-R\cos t)\sin\varphi, R\sin t)$ $(0\le t\le 2\pi)$

in Bezug zum Ursprung O! $A_t$ erzeugt Kreis.

Also $$(\varphi,t)\longmapsto \vec{r}(\varphi,t)=\underline{\underline{\begin{pmatrix}(2R-R\cos t)\cos\varphi\\(2R-R\cos t)\sin\varphi\\R\sin t\end{pmatrix}}}\qquad (0\le\varphi,t\le 2\pi)$$ R Röhrenradius, 2R Mittellinien-Radius

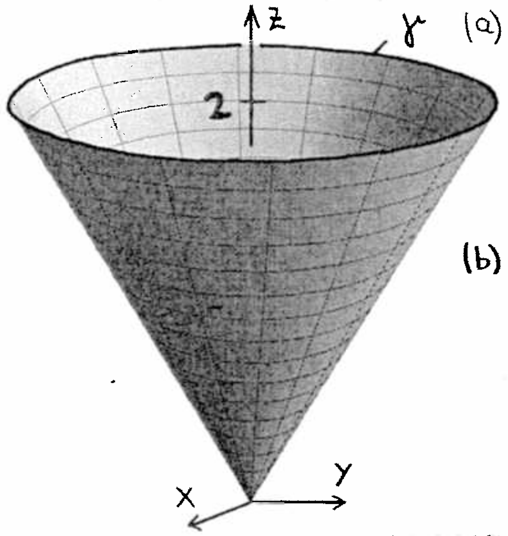
(b) Röhren-Radius R mit φ in 2π linear von 0 auf R: Ersetze R durch $\left(\frac{\varphi}{2\pi}R\right)$. Mittellinien-Radius 2R bleibt.

$$(\varphi,t)\longmapsto \vec{r}(\varphi,t)=\underline{\underline{\begin{pmatrix}(2R-\frac{\varphi}{2\pi}R\cos t)\cos\varphi\\(2R-\frac{\varphi}{2\pi}R\cos t)\sin\varphi\\\frac{\varphi}{2\pi}R\sin t\end{pmatrix}}}$$

(c) Mittellinien-Radius 2R mit φ in 2π linear von 0 auf 2R: Ersetze 2R durch $\frac{\varphi}{2\pi}2R$

$$(\varphi,t)\longmapsto \vec{r}(\varphi,t)=\begin{pmatrix}(\frac{\varphi}{2\pi}2R-\frac{\varphi}{2\pi}R\cos t)\cos\varphi\\(\frac{\varphi}{2\pi}2R-\frac{\varphi}{2\pi}R\sin t)\sin\varphi\\\frac{\varphi}{2\pi}R\sin t\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}\frac{\varphi}{2\pi}R(2-\cos t)\cos\varphi\\\frac{\varphi}{2\pi}R(2-\sin t)\sin\varphi\\\frac{\varphi}{2\pi}R\sin t\end{pmatrix}}}$$

Bem: Für ein "Schneckenhaus" könnte man $z=\frac{\varphi}{2\pi}R\sin t$ noch verändern ...




(a) $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ ← Radius $r=1$ Horizontal mit Höhe $z=2$

(Kurvenparameter $\varphi$)

$$\underline{\underline{\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix}}} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

(b) Bewegungsparameter $t$ $(0 \le t \le 1)$

Höhe $z$ linear mit $t$ von 2 nach 0: $z(t) = 2 - 2t = 2(1-t)$

Radius $r$ linear mit $t$ von 1 nach 0: $r(t) = 1-t$

(oder $0 \le \tilde{t} \le 2$, $z(\tilde{t}) = 2-\tilde{t}$, $r(\tilde{t}) = 1 - 0.5\tilde{t}$ oder ...)

$$\underline{\underline{S: (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} (1-t)\cos\varphi \\ (1-t)\sin\varphi \\ 2(1-t) \end{pmatrix}}} \quad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix}$$

(c) $x = (1-t)\cos\varphi$, $y = (1-t)\sin\varphi$, $z = 2(1-t) \rightarrow (1-t) = \frac{z}{2}$

$$x^2 + y^2 = (1-t)^2 \underbrace{[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]}_{\equiv 1} = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \leftrightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}}}$$

(d) $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -(1-t_0)\sin\varphi_0 \\ (1-t_0)\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -2(1-t_0)\cos\varphi_0 \\ -2(1-t_0)\sin\varphi_0 \\ (1-t_0)[\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0] \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{= (1-t_0)\begin{pmatrix} -2\cos\varphi_0 \\ -2\sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

(e) S ist <u>Regelfläche</u>, denn die t-Linien sind Geradenstücke

$$\begin{pmatrix} (1-t)\cos\varphi \\ (1-t)\sin\varphi \\ 2(1-t) \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix} = t^* \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix},\ 1 \ge t^* \ge 0$$

Par'drst. einer Geraden!

S entsteht durch entlang führen einer Geraden durch (0,0,0) an $\gamma$ → Kreiskegelstück

S ist <u>abwickelbar</u>: $\vec{n} = \underbrace{(1-t_0)}_{\text{verändert nur die Länge von } \vec{n}} \underbrace{\begin{pmatrix} -2\cos\varphi_0 \\ -2\sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtung!}}$ ist in seiner Richtung unabhängig von $t$, d.h. die Richtung von $\vec{n}$ ist konstant entlang einer t-Linie.