Übungsserie 4

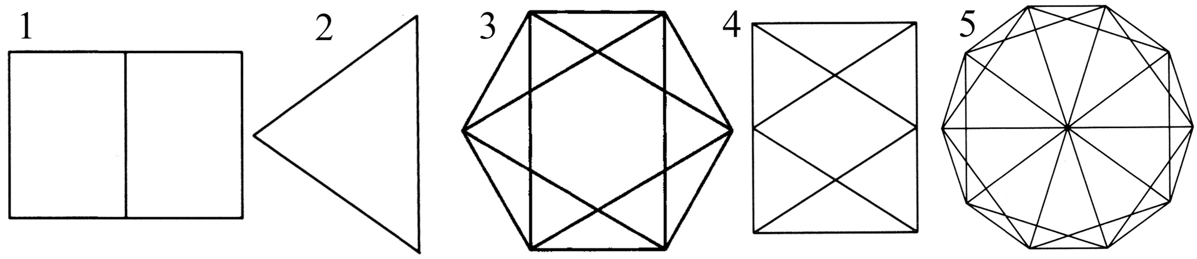
Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 4. April 2008** in der Vorlesung

1. **Platonische Körper**

   (a) Die Abbildungen 1, 2, …, 5 in Figur 1 zeigen besondere Ansichten von Drahtmodellen **Platonischer Körper**. Um welchen regulären Körper handelt es sich jeweils?

   (b) Was ist jeweils die kleinstmögliche bzw. die grösstmögliche Eckenzahl im Umriss eines regulären Tetraeders, Würfels und Oktaeders?

   (c) Berechnen Sie die Oberfläche S und das Volumen V eines regulären Oktaeders mit der Kantenlänge a.



Figur 1 (Aufgabe 1a)

2. Verbindet man alle Punkte eines ebenen n-Ecks mit den entsprechenden Punkten eines (räumlich) parallel verschobenen, kongruenten n-Ecks, entsteht ein n-seitiges **Prisma**.

   (a) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen (ausgedrückt durch n) hat ein solches Prisma? Verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel!

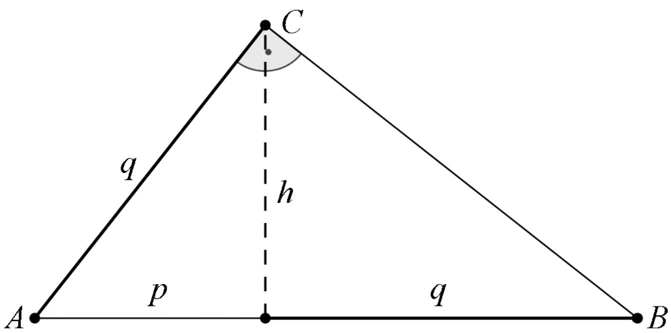
   (b) Skizzieren Sie ein Prisma, das *kombinatorisch regulär* aber nicht regulär ist sowie ein Prisma, das *nicht konvex* ist.

   (c) Unter welcher Voraussetzung an die Grundfläche ist das Prisma konvex?

3. (a) Der Inhalt eines randvollen, kegelförmigen Kelches wird in ein **kegelförmiges Glas** mit doppeltem Fassungsvermögen umgeleert; dabei gehen $\frac{3}{4}$ der Flüssigkeit verloren. Bis zu welchem Bruchteil der Glashöhe steht die Flüssigkeit im Glas?

   (b) Figur 2 zeigt zwei Breitmaulnashörner. Das Muttertier hat eine Masse von 2000 kg. Bestimmen Sie unter der Annahme von Skalenverhalten durch Messung und Rechnung einen Näherungswert für die Masse des Jungtiers.

Figur 2 (Aufgabe 3)



Figur 3 (Aufgabe 4)

4. Im **rechtwinkligen Dreieck** ABC teilt die Höhe h die Hypotenuse AB gerade so, dass der grössere Abschnitt q gleich gross wie die kleinere Kathete AC ist (Figur 3). In welchem Verhältnis $q : p$ teilt dann die Höhe h die Hypotenuse? Um was für ein Verhältnis handelt es sich dabei?

Übungsserie 4

5. Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus lauter 4-kantigen und/oder 5-kantigen Ecken bestehen (D.h. dass in jeder Ecke jeweils nur 4 od. 5 Kanten zusammenstossen.) und deren Seitenflächen alles n-Ecke (nicht unbedingt reguläre) mit derselben Eckenzahl n sind.

   (a) Zeichnen Sie einen Körper bestehend aus lauter 4-kantigen Ecken und lauter Dreiecken. Skizzieren Sie ferner eine mögliche 4-kantige Ecke, in der lauter Vierecke zusammenstossen.

   (b) Zeigen Sie, dass solche am Anfang beschriebene Polyeder für $n \geq 4$ **nicht** existieren.

   (c) Gibt es solche Polyeder für $n \geq 4$, wenn man noch 6-kantige Ecken zulässt?

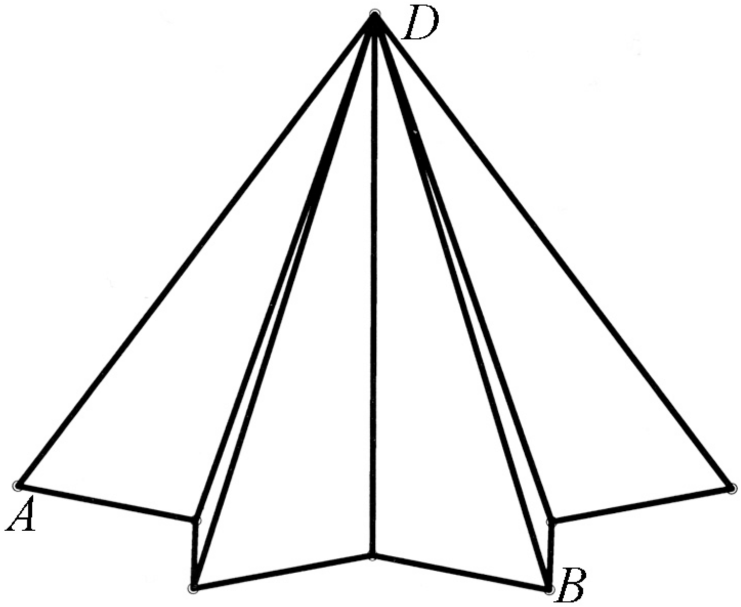
6. Wir betrachten in dieser Aufgabe ein **reguläres Tetraeder** $ABCD$ der Kantenlänge s mit Umkugel. Bezeichne Z den Umkugelmittelpunkt und M_{AB}, M_{CD} die Mittelpunkte der Kanten AB, CD. (Tipp: Man kann aus den 8 Ecken eines Würfels 4 so auswählen, dass sie ein reguläres Tetraeder bilden. Skizzieren Sie zuerst einen Würfel und anschliessend in diesem das Tetraeder $ABCD$.)

   (a) Skizzieren Sie den 'Querschnitt' des Tetraeders, der entsteht, wenn das Tetraeder mit der Ebene geschnitten wird, die AB und den Punkt M_{CD} enthält. (Seitenlängen angeben!)

   (b) Das Tetraeder wird entlang der Verbindungsgeraden $M_{AB}M_{CD}$ betrachtet. Skizzieren Sie den bei dieser Betrachtung wahrgenommenen Umriss des Körpers.

   (c) Berechnen Sie mithilfe von (a) den Radius der Umkugel ausgedrückt durch s.

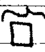
   (d) Das Tetraeder $ABCD$ wird wie in Figur 4 abgebildet zu einem regelmässigen Pyramidenstern vergrössert. (Diesen kann man sich auch als zwei gegeneinander verdrehte Tetraeder vorstellen.) Um welchen Faktor vergrössert sich (i) das Volumen, (ii) die Oberfläche des Tetraeders?



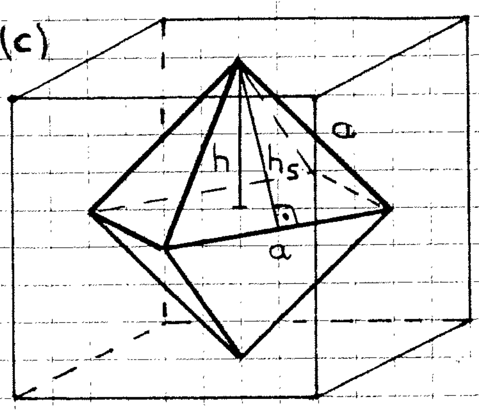
Figur 4 (Aufgabe 6)

Übungsserie 4, FS 2008, seite 1

(1) (a) 1: Würfel, 2: Tetraeder, 3: Oktaeder, 4: Oktaeder, 5: Ikosaeder

(b) Tetraeder: $\underbrace{\text{min} \to 3}_{\text{Agb 1a 2}}$, $\underbrace{\text{max} \to 4}_{\text{Agb 6b}}$ Würfel: min → 4 , max → 6  Oktaeder: min → 4 , $\underbrace{\text{max} \to 6}_{\text{Agb 1a 3}}$

(c)



(b) $S = 8 \cdot F_\Delta$ mit $F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2}$

$= \underline{\underline{2\sqrt{3}\, a^2}}$ $\qquad = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$V = 2 \cdot V_{Pyr}$ mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$

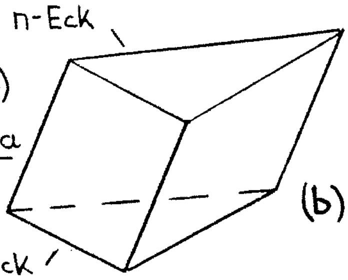
$= 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{3} a^3}}$ Quadrat! 45°-90°-Dreieck

$a^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$

$a = \sqrt{2} \cdot h$

---

(2) (a) Prisma

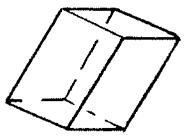


$e = n + n = \underline{\underline{2n}}$, $k = n + n + n = \underline{\underline{3n}}$, $f = 1 + n + 1 = \underline{\underline{n+2}}$

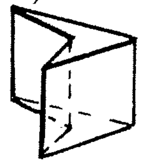
(Anzahl Ecken) (Anzahl Kanten) (Anzahl Flächen)

Eulersche Formel: $e - k + f = 2n - 3n + n + 2 = \underline{2}$ (stimmt)

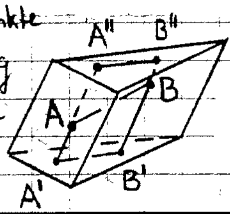
(b) kombinatorisch regulär ⇝ lauter Vierecke (kein Würfel)



nicht konvex → nicht konvexes n-Eck

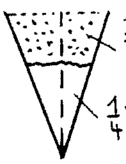


(c) ~~Das ebene n-Eck (die Grundfläche) muss konvex sein!~~ [Sind A, B zwei beliebige Punkte des Körpers; A', B' und A'', B'' die Projektionen von A, B entlang der Verschiebungsrichtung auf die "Endflächen", so gehören $\overline{AA'}$, $\overline{BB''}$ zum Körper und $\overline{A'B'}$ zur Grundfläche bzw. $\overline{A''B''}$ zur Deckfläche (da diese konvex sind) ⇝ $\overline{AB}$ muss zum Körper gehören.]

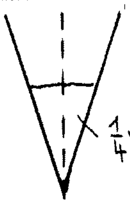


---

(3) (a)



⇝



Vol. Glas

$\frac{1}{4} V = \frac{1}{8} (2V) = \frac{1}{8} V_{Glas}$

Volumenfaktor: $\frac{1}{8} = \lambda^3$

Längenfaktor: $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ → Halbe Glashöhe

(b) Höhe Muttertier: 3.4 mm
Jungtier 2.7 mm

Längenfaktor: $\lambda = \frac{27}{34} \approx 0.8$

Masse Jungtier: $\lambda^3 \cdot 2000\,\text{kg} = 1024\,\text{Kg} \approx \underline{\underline{1000\,\text{kg}}}$

---

(4) Pythagoras im ⊾-ΔAHC: $q^2 - p^2 = h^2$ Pythagoras im ⊾-ΔABC: $|BC|^2 = (p+q)^2 - q^2 = p^2 + 2pq + \cancel{q^2} - \cancel{q^2}$

Pythagoras im ⊾-ΔHBC: $|BC|^2 - q^2 = h^2$

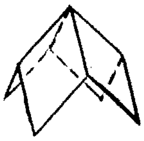
⇝ $q^2 - p^2 = p^2 + 2pq - q^2$ bzw. $2q^2 - 2pq - 2p^2 = 0 \quad \| : 2p^2$

$\left(\frac{q}{p}\right)^2 - \left(\frac{q}{p}\right) - 1 = 0$. Setze $x = \frac{q}{p}$ (oder $p = 1$): $x^2 - x - 1 = 0 \to x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ ↯}\right)$

oder: Kathetensatz im ⊾-ΔABC: $q^2 = p(p+q) = pc \leftrightarrow \frac{q}{p} = \frac{c}{q} \overset{\text{Teilung nach GS}}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Verhältnis des GS

~~oder: ΔABC ist eine massstäbl. Vergrösserung von ΔAHC~~ → $\frac{q}{p} = \frac{c}{q}$

5 **(a)** Oktaeder, Rhombenecke

(b) e_4 ; e_5 Anzahl 4- bzw. 5-Kantige Ecken; ① $e_4 + e_5 = e$

② $4e_4 + 5e_5 = 2K$ (In jeder 4-kantigen Ecke stossen 4 Kanten zus., in jeder 5-Kantigen 5. Dabei wird jede 2× gezählt)

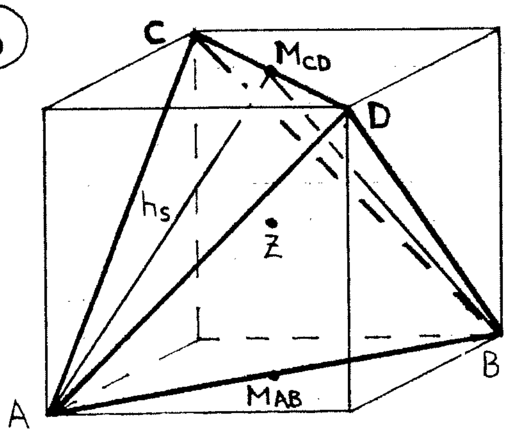
③ $n f_n = 2K$ (jedes n-Eck hat n Kanten. Dabei wird jede 2× gezählt)

Eulersche Polyeder Formel: $2 = e - k + f = e_4 + e_5 - \frac{1}{2}(4e_4 + 5e_5) + \frac{1}{n}(4e_4 + 5e_5) = \left(1 - \frac{4}{2} + \frac{4}{n}\right)e_4 + \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{n}\right)e_5$

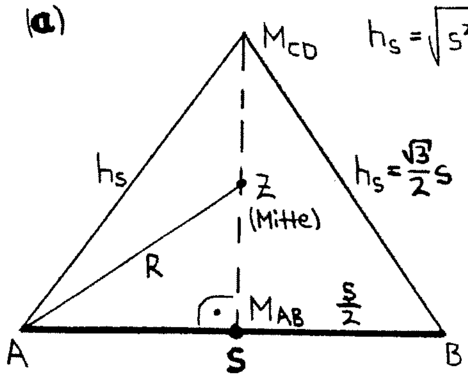
$= \left(-1 + \frac{4}{n}\right)e_4 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{n}\right)e_5 \leq 0$, da $\frac{4}{n} \leq 1, \frac{5}{n} \leq \frac{3}{2}$ für $n \geq 4$ $(e_4, e_5 \geq 0)$

(c) zusätzlich e_6 gibt zusätzl. Summand: $\left(1 - \frac{6}{2} + \frac{6}{n}\right)e_6$ mit $\left(-2 + \frac{6}{n}\right) < 0$ für $n \geq 4$ $(e_6 \geq 0)$ $\underline{\underline{\text{Nein}}}$

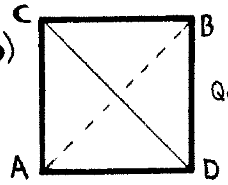
6



(a) $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}s$

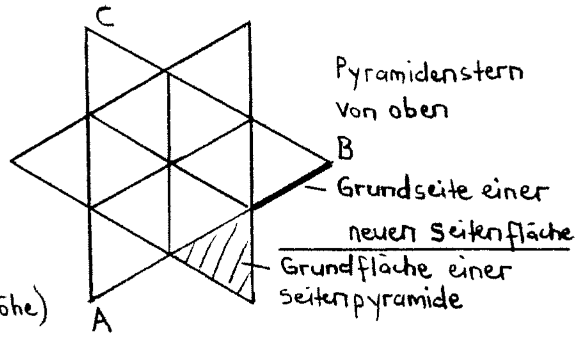


(b)



(c) $|M_{AB}Z| = \frac{1}{2}|M_{AB}M_{CD}| = \frac{1}{2}\sqrt{h_s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}s$

$R^2 = |M_{AB}Z|^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{2}{16}s^2 + \frac{1}{4}s^2 = \frac{6}{16}s^2 = \frac{3}{8}s^2$, $\underline{\underline{R = \sqrt{\frac{3}{8}}\,s}}$



(d) Die Seitenpyramide drittelt AB, die Grundfläche ist $\frac{1}{9}$ der Grundfläche des Tetraeders. (gleichseitige Dreieckchen)

Volumen: Alle Teilpyramiden sind volumengleich (gleiche Fläche, Höhe)

Tetraeder $\hat{=}$ 9 Pyramiden, P'stern $\hat{=}$ 12 Pyramiden $\rightarrow \frac{12}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

Oberfläche: Alle neuen Seitenflächen sind flächengleich (gleiche Grundlinie, Höhe), Grundfl. Stern $\hat{=} \frac{4}{3}$ Fläche Tetra $\hat{=}$ 4 Seitenfl.

Tetraeder $\hat{=}$ 4·3 Seitenflächen, P'stern $\hat{=}$ 12+4 Seitenflächen $\rightarrow \frac{16}{12} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$