Übungsserie 1

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 17. Oktober 2008** in der Vorlesung

1. Die **Kurve** γ ist durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$\gamma: \ [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} t-2 \\ 0.5\,t^2-2 \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein ebenes Koordinatensystem (Anfangs- und Endpunkt beachten!). Berechnen Sie ferner die Koordinaten der Schnittpunkte von γ mit den Koordinatenachsen.

   (b) Welchen t-Wert hat der 'unterste' Punkt von γ? Welche Koordinaten hat er?

   (c) Bestimmen Sie eine Gleichung von γ in der Form $y = f(x)$.

2. Ermitteln Sie eine möglichst einfache **Parameterdarstellung**

   (a) der **Ellipse** e, deren Halbachsen die Längen 2 und 1 aufweisen, parallel zu der x- bzw. y-Achse verlaufen und deren Mittelpunkt der Punkt $(0,0,1)$ ist.

   (b) des **Kreises** k mit Radius 4, der parallel zur (x,z)-Ebene liegt und dessen Mittelpunkt der Punkt $(1,2,3)$ ist.

3. **Ableitungstraining:** Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

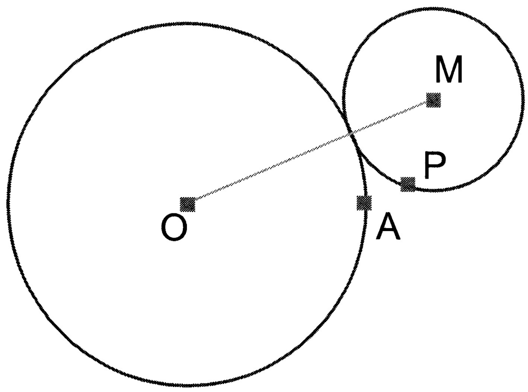
(a) $x(t) = 4t$	(b) $y(t) = 1+3t$	(c) $x(t) = R\sin\left(\frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}\,t\right)$
(d) $y(t) = at\sin t$	(e) $x(t) = tR\cos\varphi$	(f) $x(\varphi) = tR\cos\varphi$
(g) $z(t) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi$	(h) $z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi$	(i) $x(\varphi) = e^{\varphi}\cos\varphi$

4. Der Kreis k_2 mit Radius r rollt auf der Aussenseite des Kreises k_1 mit Radius $2r$ und Mittelpunkt $O=(0,0)$ im Gegenuhrzeigersinn ab (Figur 1). Dabei überstreicht der feste Punkt P auf k_2 vom Punkt $A=(2r,0)$ ausgehend eine so genannte **Epizykloide** γ.

   (a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Epizykloide γ.

   (b) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Epizykloide γ für $r = 1\,\mathrm{cm}$. (Achten Sie auf Symmetrien, Spitzen und die relative Anordnung der Spitzen.)

Die oben beschriebene Bewegung kann auch als Überlagerung zweier ebener Drehungen (mit proportionalen Winkelgeschwindigkeiten) aufgefasst werden. Solche Bewegungen heissen *Trochoidenbewegungen*. Trochoidenbewegungen lassen sich z. B. bei Planeten beobachten. Der Mond 'kreist' in 27 Tagen um die Erde, während die Erde dabei in 365 Tagen um die Sonne 'kreist'.



Figur 1 (Aufgabe 4)

5. Figur 2 zeigt ein **Schrauben-Minarett** (Irak, um 900). (Annahmen: Der Weg führe vom Grundkreis (Radius R) in 6 Umrundungen zur Spitze (Radius ≈ 0), der Höhenunterschied betrage dabei H.)

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Kurve, die ungefähr wie der abgebildete Weg aussieht. (Tipp: Betrachten Sie zuerst den Grundriss des Weges und gehen Sie von einer konst. Radiusdifferenz pro Umlauf aus.)

   (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Kurve mit dem z-Wert (Höhe über der Grundkreisebene) des Kurvenpunkts als Parameter.

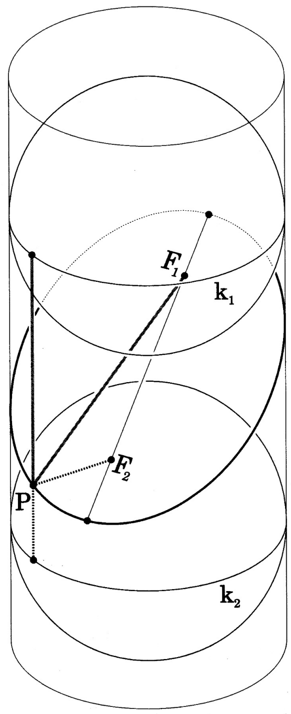
6. Ein gerader **Kreiszylinder** wird unter dem Winkel α von einer Ebene E geschnitten. (α bezeichnet den Winkel zwischen E und der Zylinderachse, es sei $0 < \alpha \leq 90°$.)

   (a) Beweisen Sie mithilfe von Figur 3: Die ebene Schnittkurve ist eine **Ellipse**.

   (b) Berechnen Sie die Halbachsen der Ellipse in Abhängigkeit des Winkels α.

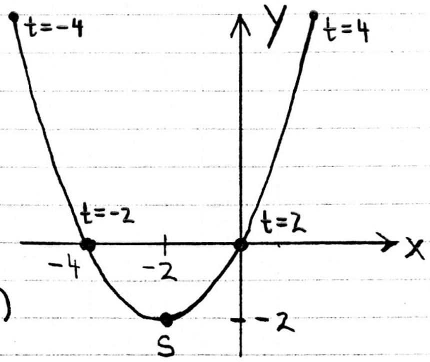
   Anleitung: Dem Zylinder lassen sich zwei Kugeln einbeschreiben, die den Zylinder in einem Kreis und die Schnittebene E in einem Punkt F_1 bzw. F_2 berühren. (Diese raffinierte Idee stammt von dem belgischen Mathematiker und Baumeister Pierre Germinal Dandelin (1794 bis 1847)).

Figur 2 (Aufgabe 5)



Figur 3 (Aufgabe 6)

Übungsserie 1 HS 2008



① (a) $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t-2\\0.5t^2-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow t_0=2$, in $y(t)$: $y_0=0.5\cdot4-2=0 \rightsquigarrow (0,0)$

$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t-2\\0.5t^2-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ $0.5t^2=2$, $t^2=4$

$t_1=2$, $t_2=-2$ in $x(t)$: $x_1=2-2=0 \rightsquigarrow (0,0)$, $x_2=-2-2=-4 \rightsquigarrow (-4,0)$

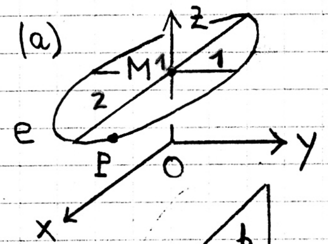
(b) $y(t)=\underbrace{0.5t^2}_{\geq 0}-2 \geq -2$ und $=-2$ nur für $t=0$, in $x(t)$: $x_S=-2$, $y(t)$: $y_S=-2$ $\rightsquigarrow S=(-2,-2)$

(c) $x(t)=t-2 \rightsquigarrow t=x+2$ in $y(t)=0.5t^2-2=0.5(x+2)^2-2=0.5(x^2+4x+4)-2$

$y=0.5x^2+2x$ (Parabel mit Scheitel S)

---

② (a)

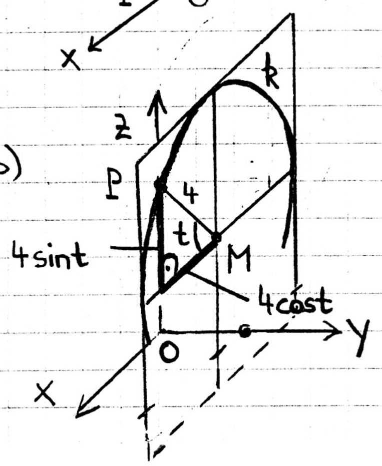


Ellipse bez M: $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}a\cos t\\b\sin t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}$

bez O: $\vec{r}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}$

$e: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}$

(b)



Kreis bez M: $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}4\cos t\\0\\4\sin t\end{pmatrix}$, bez O: $\vec{r}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\cos t\\0\\4\sin t\end{pmatrix}$

$k: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t)=\begin{pmatrix}4\cos t+1\\2\\4\sin t+3\end{pmatrix}$

Zur Erinnerung die Regeln:

① $(x^n)'=nx^{n-1}$, speziell: $(x^1)'=1\cdot x^0=1$, $(\text{Zahl})'=0$

② $(f+g)'=f'+g'$

③ $(\cos x)'=-\sin x$, $(\sin x)'=\cos x$

④ Kettenregel $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot\underbrace{g'(x)}_{\text{innere Abl}}$

⑤ Produktregel $(f\cdot g)'=f'g+fg'$

③ (a) $x'(t)=(4t)'\overset{①}{=}4\cdot1=\underline{\underline{4}}$

(b) $y'(t)=(1+3t)'\overset{②}{=}(1)'+(3t)'\overset{①}{=}0+3\cdot1=\underline{\underline{3}}$

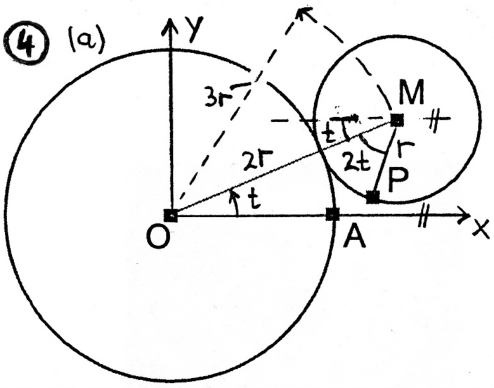
(c) $x'(t)=\left(\underbrace{R\sin}_{f}\underbrace{\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)}_{g}\right)'\overset{③④}{=}\underbrace{R\cos}_{f'}\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)'}_{\text{innere Abl}}\overset{①}{=}R\cos\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)\cdot\underbrace{\frac{2\pi}{60s}}_{g'}=\underline{\underline{\frac{2\pi R}{60s}\cos\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)}}$

(d) $y'(t)=(\underbrace{at\sin t}_{f\cdot g})'\overset{⑤}{=}a[\underbrace{(t)'\sin t}_{f'\cdot g}+\underbrace{t\cdot(\sin t)'}_{f\cdot g'}]\overset{①③}{=}a[1\cdot\sin t+t\cos t]=\underline{\underline{a\sin t+at\cos t}}$

(e) $x'(t)=(tR\cos\varphi)'=R\cos\varphi\cdot(t)'=\underline{\underline{R\cos\varphi}}$

(f) $x'(\varphi)=(tR\cos\varphi)'=tR(\cos\varphi)'\overset{③}{=}\underline{\underline{-tR\sin\varphi}}$

④ (a)



Parameter $t \mathrel{\hat=}$ Drehwinkel von M bez O

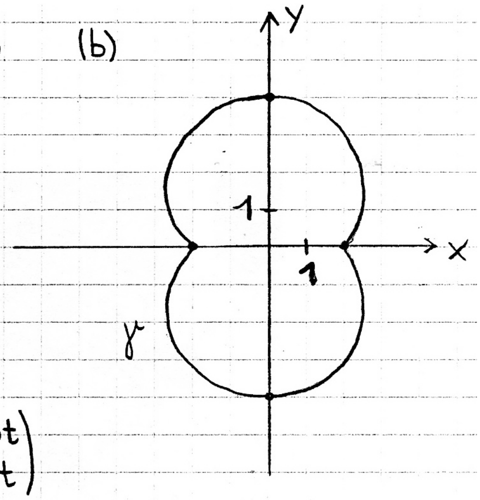
$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3r\cos t \\ 3r\sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Abrollbedingung: gleiche Längen entsprechender Bogenstücke

$$t \cdot 2r \overset{\text{Soll}}{=} \varphi \cdot r \rightsquigarrow \varphi = 2t$$

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -r\cos(3t) \\ -r\sin(3t) \end{pmatrix}$$

(b)



$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3r\cos t - r\cos 3t \\ 3r\sin t - r\sin 3t \end{pmatrix}$$

---

⑤ Wahl des KS: z-Achse $\mathrel{\hat=}$ Turmachse, Anfangspunkt $(R,0,0)$, Endpunkt $(0,0,H)$

(a) Grundriss: "Verjüngende" Spirale beginnend mit Radius $r = R$, Parameter $t \mathrel{\hat=}$ Drehwinkel, in 6 Windungen ($\mathrel{\hat=} 6\cdot 2\pi$) Abnahme um R: $\frac{R}{12\pi}$ Radiusdifferenz pro Winkeleinheit

$$x(t) = \underbrace{\left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)}_{\text{Radius}} \cos t, \quad y(t) = \underbrace{\left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)}_{\text{Radius}} \sin t \quad (0 \le t \le 6\cdot 2\pi)$$

Höhe: In 6 Windungen ($\mathrel{\hat=} 6\cdot 2\pi$) Höhe H $\rightsquigarrow \frac{H}{12\pi}$ Höhendifferenz pro Winkeleinheit

$$z(t) = \frac{H}{12\pi} t$$

$$\gamma: [0, 12\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\cos t \\ \left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\sin t \\ H/12\pi \cdot t \end{pmatrix}$$

(b) $z(t) = \frac{H}{12\pi} t \rightsquigarrow t = \frac{12\pi}{H} z$

$$\gamma: [0, H] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad z \longmapsto \vec{r}(z) = \begin{pmatrix} \left(R - \frac{R}{H}z\right)\cos\left(\frac{12\pi}{H}z\right) \\ \left(R - \frac{R}{H}z\right)\sin\left(\frac{12\pi}{H}z\right) \\ z \end{pmatrix}$$

---

⑥ (a) Sei P ein beliebiger Punkt der Schnittkurve. Die (vertikale) Mantellinie auf dem Zylinder durch P schneidet die Berührkreise k_1 und k_2 in den Punkten B_1 und B_2. Sie ist Tangente beider Kugeln. PF_1 und PB_1 sind Tangentenabschnitte von P an die obere Kugel und sind deshalb gleich lang: $|PF_1| = |PB_1|$ ①

Analog gilt für die Tangentenabschnitte: $|PF_2| = |PB_2|$ ②

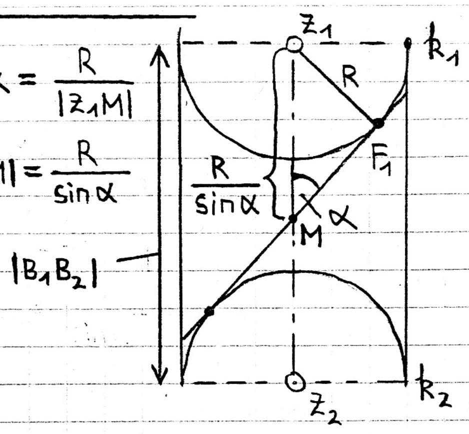
$$|PF_1| + |PF_2| \overset{①,②}{=} |PB_1| + |PB_2| = |B_1B_2| = \text{konst.}$$

Alle Punkte P der Schnittkurve haben die konstante Entfernungssumme $|B_1B_2|$ zu F_1, F_2 $\rightsquigarrow$ Ellipse!

*

$$\sin\alpha = \frac{R}{|Z_1M|}$$

$$|Z_1M| = \frac{R}{\sin\alpha}$$



(b) Kl. Halbachse $b = R$ (Zylinderradius), gr. Halbachse $a \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}|B_1B_2| \overset{*}{=} |Z_1M| \overset{\text{Figur *}}{=} \frac{R}{\sin\alpha}$