Übungsserie 2

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 21. November 2008** in der Vorlesung

1. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Raumkurve** γ beschrieben

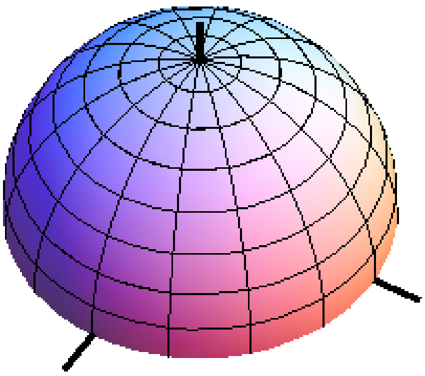
$$\gamma: \ [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto \vec{r}(\varphi) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\varphi\cos\varphi \\ \frac{1}{2\pi}\varphi\sin\varphi \\ \sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2}\,\varphi^2} \end{pmatrix}$$

   a) Zeigen Sie, dass ein allg. Kurvenpunkt $\vec{r}(\varphi)$ vom Koordinatenursprung den Abstand 1 hat. D.h., da stets $z \geq 0$ ist, dass der Kurvenpunkt auf der Halbkugel um $(0,0,0)$ mit Radius 1 liegt (Figur 1).

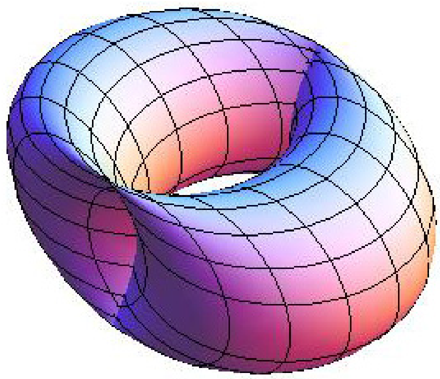
   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Anfangspunktes P und jene des Schnittpunktes Q von γ mit der (x, y)-Ebene.

   c) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein räumliches Koordinatensystem. Tipp: Betrachten Sie zuerst den Grundriss der Kurve. (Bemerkung: Die Kurve steht in Q senkrecht zur (x, y)-Ebene (ohne Beweis))

   d) Wird eine Strecke, welche mit dem einen Endpunkt fest im Ursprung $(0,0,0)$ ruht, mit ihrem anderen Endpunkt der Kurve γ entlanggeführt, überstreicht sie eine Fläche S. Bestimmen Sie eine mögliche Parameterdarstellung von S.



Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. In dieser Aufgabe generieren Sie eine **Fläche** S durch Verschieben eines Kreises k entlang eines anderen Kreises c (Figur 2).

   a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung des **Kreises** k mit Radius 3 und Mittelpunkt $(0,0,0)$, der in der (x, y)-Ebene liegt und eine Parameterdarstellung des **Kreises** c mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,3,0)$, der in der (y, z)-Ebene liegt.

   b) Der Kreis c wird nun so **verschoben**, dass sein Mittelpunkt stets auf k liegt und seine Kreisebene parallel zur (y, z)-Ebene bleibt; dabei überstreicht er eine Fläche S. Finden Sie eine Parameterdarstellung von S.

3. Ein **Auto** fährt gleichmässig im Uhrzeigersinn eine schraubenförmige Rampe mit dem Radius r und der Höhe h in der Zeit T hinunter. Dabei dreht sich das Auto um 360°.

   a) Erstellen Sie eine Skizze, tragen Sie darin das von Ihnen gewählte Koordinatensystem ein (Ursprung, Koordinatenachsen!) und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bewegung, die das Auto beschreibt.

   b) Wie schnell fährt das Auto? (formale Lösung)

Übungsserie 2

4. Die Punkte $A(2,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,4)$, $O(0,0,0)$ legen eine **Pyramide** mit der dreieckigen 'Grundfläche' ABC fest. Die Seitenflächen sind rechtwinklige Dreiecke!

   a) Skizzieren Sie die Pyramide $ABCO$ in ein räumliches Koordinatensystem.

   b) Berechnen Sie zu jeder Dreiecksfläche den nach aussen gerichteten Normalenvektor: $\vec{n}_1 = \vec{OC} \times \vec{OB}$, $\vec{n}_2 = \vec{OA} \times \vec{OC}$, $\vec{n}_3 = \vec{OB} \times \vec{OA}$, $\vec{n}_G = \vec{AB} \times \vec{AC}$.

   c) Für den Flächeninhalt F eines beliebigen von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks gilt: $F = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$. Begründen Sie kurz diese Formel.

   d) Berechnen Sie mithilfe von (b), (c) die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3 der drei Seitenflächen und jenen, F_G, der Grundfläche und zeigen Sie, dass der **räumliche Satz des Pythagoras** gilt: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_G^2$.
   (Der räumliche Satz des Pythagoras gilt allgemein für eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, deren Seitenflächen rechtwinklige Dreiecke sind.)

5. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) := \begin{pmatrix} (2-2t)\cos\varphi \\ (1-t)\sin\varphi \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le t \le 2)$$

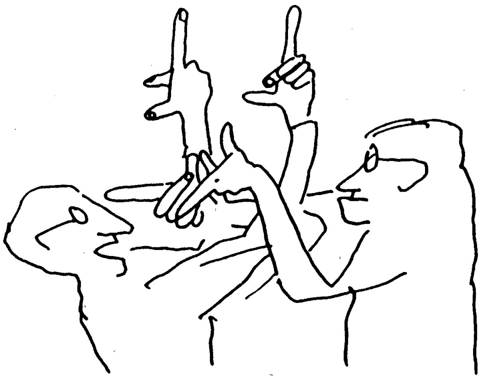
   a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die φ-Linien zu $t = 0$ und $t = 2$. Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)

   b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien. Was für Kurven sind die t-Linien?

   c) Welchen Winkel schliesst die t-Linie zu $\varphi = 0$ mit der z-Richtung ein?

6. **Vektorprodukttraining:** Berechnen Sie: (a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}R \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -R\sin\varphi_0 \\ R\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Berechnen Sie ferner $\vec{s} \times \vec{t}$, wobei $\vec{s}$ die Ableitung von $\vec{r}(\varphi, t)$ nach φ, und $\vec{t}$ die Ableitung von $\vec{r}(\varphi, t)$ nach t bedeutet, für (c) $\vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} t + \cos\varphi \\ t + \sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ und (d) $\vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos t \\ R\cos\varphi\sin t \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$



vectorproduct discussion

Bitte wenden!

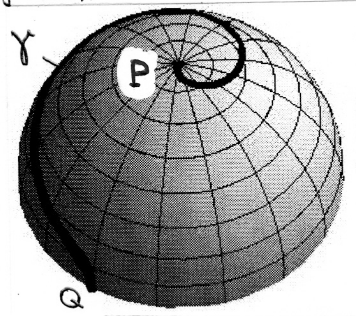
Übungsserie 2 HS 2008 Seite 1

1 (a) Abstand von $(0,0,0)$:

$$\left|\vec r(\rho)-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right| = |\vec r(\rho)| = \left|\begin{pmatrix}\frac{1}{2\pi}\rho\cos\rho\\ \frac{1}{2\pi}\rho\sin\rho\\ \sqrt{1-\dots}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4\pi^2}\rho^2\cos^2\rho+\frac{1}{4\pi^2}\rho^2\sin^2\rho}_{\frac{1}{4\pi^2}\rho^2\underbrace{(\cos^2\rho+\sin^2\rho)}_{\equiv 1}}+\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\rho^2\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4\pi^2}\rho^2+1-\frac{1}{4\pi^2}\rho^2} = \underline{\underline{1}}$$

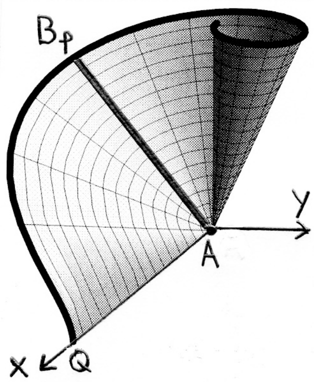
(c) Der GR ist eine archimedische Spirale von $(0,0,0)$ in 1 Windung nach $Q=(1,0,0)$ im Gegenuhrzeigersinn.



(b) Anfang: $\rho=0$: $\vec r(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{1-0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{P=(0,0,1)}}$

Q: Idee: z-Koord. $=0$, d.h. $\sqrt{1-\frac{1}{4\pi^2}\rho^2}\overset{\text{soll}}{=}0 \leftrightarrow 1=\frac{1}{4\pi^2}\rho^2 \leftrightarrow 4\pi^2=\rho^2$

$\rightsquigarrow \rho=2\pi$: $\vec r(2\pi)=\begin{pmatrix}\cos(2\pi)\\\sin(2\pi)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{Q=(1,0,0)}}$ "Schnitt"-/Endpt.



(d) $A=(0,0,0)$ ist fest. Um eine Linie AB_ρ zu "zeichnen" ist ein Parameter t nötig.
Für einen Flächenpt. $\vec r$ auf der Linie AB_ρ gilt: $\vec r=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AB_\rho}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{1}{2\pi}\rho\cos\rho-0\\\frac{1}{2\pi}\rho\sin\rho-0\\\sqrt{1-\dots}-0\end{pmatrix}$

Also: $(\rho,t)\longmapsto\vec r(\rho,t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\pi}t\rho\cos\rho\\\frac{1}{2\pi}t\rho\sin\rho\\t\sqrt{1-\frac{1}{4\pi^2}\rho^2}\end{pmatrix}$ $(0\le\rho\le2\pi,\ 0\le t\le1)$

---

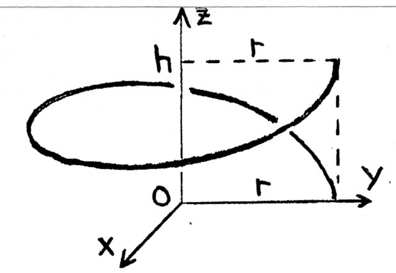
2 (a) Kreis K mit Radius 3 und Mittelpt $(0,0,0)$: $\rho\longmapsto\vec r(\rho)=\begin{pmatrix}3\cos\rho\\3\sin\rho\\0\end{pmatrix}$ (b) $\rightsquigarrow$ Mittelpt M_ρ von c

Kreis c mit Radius 2 und Mittelpt $(0,3,0)$: $t\longmapsto\vec r(t)=\begin{pmatrix}0\\2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\cos t+3\\2\sin t\end{pmatrix}$

(b) Kreis c bez M_ρ: $\overrightarrow{M_\rho P}=\begin{pmatrix}0\\2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix}$, bez O: $\vec r(\rho,t)=\overrightarrow{OM_\rho}+\overrightarrow{M_\rho P}=\begin{pmatrix}3\cos\rho\\3\sin\rho\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos\rho\\3\sin\rho+2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix}$

Also: $(\rho,t)\longmapsto\vec r(\rho,t)=\begin{pmatrix}3\cos\rho\\3\sin\rho+2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix}$ $(0\le\rho,t\le2\pi)$

3



Winkel ρ bez. y-Achse: $\rho(t)=\frac{2\pi}{T}t$ (von 0 linear auf 2π)

Höhe z bez (x,y)-Ebene: $z(t)=h-\frac{h}{T}t$ (von h linear auf 0)

Der Radius ist konstant (Schraubenlinie!). sin ↔ cos tauschen für Uhrzeigersinn!

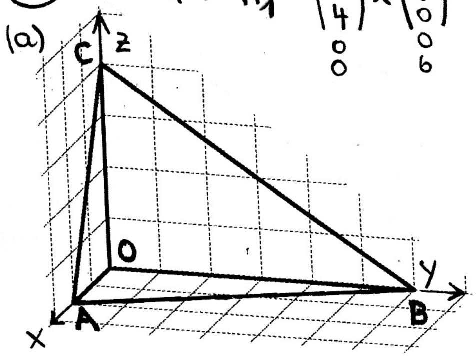
$\gamma:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ t\longmapsto\vec r(t)=\begin{pmatrix}r\sin\rho(t)\\r\cos\rho(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\\r\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\\h-\frac{h}{T}t\end{pmatrix}$

$\vec v(t)=\vec r\,'(t)=\begin{pmatrix}r\frac{2\pi}{T}\cos\rho\\r\frac{2\pi}{T}(-\sin\rho)\\-\frac{h}{T}\end{pmatrix}$, $v=|\vec v(t)|=\sqrt{r^2\frac{4\pi^2}{T^2}\underbrace{[\cos^2\rho+\sin^2\rho]}_{\equiv1}+\frac{h^2}{T^2}}=\sqrt{\frac{4\pi^2r^2}{T^2}+\frac{h^2}{T^2}}=\underline{\underline{\frac{1}{T}\sqrt{4\pi^2r^2+h^2}}}$

oder: "Zylinderfläche" abwickeln $\rightsquigarrow$ Fahrweg $\hat=$ Diagonale im Rechteck mit Breite $2\pi r$ und Höhe h in Zeit T

4

(a)

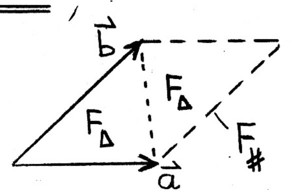


(b) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{matrix}$

$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \cancel{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{matrix}$,

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_G = \begin{pmatrix} \cancel{-2} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{-2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} -2 & -2 \\ 6 & 0 \end{matrix}$



(c) Für das von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm: $F_\# = |\vec{a} \times \vec{b}|$

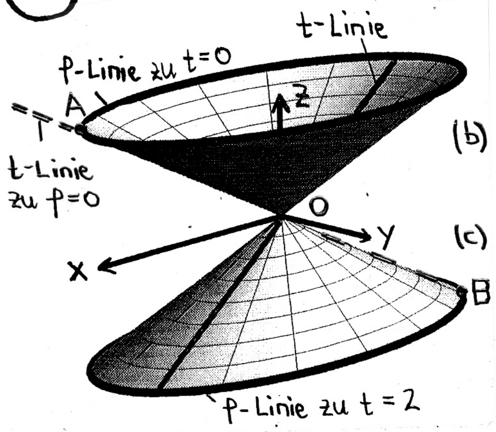
Dreieck: $F_\Delta = \frac{1}{2} F_\# = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

(d) $F_1 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 12, \quad F_2 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4, \quad F_3 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = 6$

$F_G = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 6^2} = 14$, es ist $12^2 + 4^2 + 6^2 = 14^2$ ✓

5

Ellipsen-Doppelkegel



(a) φ-Linie zu $t=0$: $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi, 0) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 1 \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ Ellipse mit Mittelpt $(0,0,1)$ parallel zur (x,y)-Ebene mit Halbachsen 2 und 1

φ-Linie zu $t=2$: $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi, 2) = \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ -1 \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$ Dito, aber Mittelpt $(0,0,-1)$

(b) $\vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 2t\cos\varphi \\ \sin\varphi - t\sin\varphi \\ 1 - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$ d.h. "Aufpt" + t·"Richtung" → Geradenstücke durch O

(c) t-Linie zu $\varphi = 0$: $t \mapsto \vec{r}(0, t) = \begin{pmatrix} 2-2t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Aufpt.}} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ← Richtung

Anfangspt $(t=0)$: $A = (2,0,1)$, Endpt $(t=2)$: $B = (-2,0,-1)$

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, z-Richtung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot 1} \approx 0.4472$

$\rightsquigarrow \alpha = 63.4349°$

6

(a) $\begin{pmatrix} \cancel{-\frac{1}{2}R} \\ 0 \\ h/2\pi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - R \cdot h/2\pi \\ 0 - 0 \\ -\frac{1}{2}R \cdot R - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi} Rh \\ 0 \\ -\frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} -\frac{1}{2}R & 0 \\ 0 & R \end{matrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \cancel{-R\sin\varphi_0} \\ R\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi_0 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 1 \cdot (-R\sin\varphi_0) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi_0 \\ R\sin\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} -R\sin\varphi_0 & 0 \\ R\cos\varphi_0 & 0 \end{matrix}$

(c) $\vec{s} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} \cancel{-\sin\varphi} \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - 0 \\ 0 - (-\sin\varphi) \\ -\sin\varphi - \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\sin\varphi - \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} -\sin\varphi & 1 \\ \cos\varphi & 1 \end{matrix}$

(d) $\vec{s} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos t \\ -R\sin\varphi\sin t \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin t \\ R\cos\varphi\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} \cancel{-R\sin\varphi\cos t} \\ -R\sin\varphi\sin t \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{-R\cos\varphi\sin t} \\ R\cos\varphi\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2\varphi\cos t \\ -R^2\cos^2\varphi\sin t \\ * \ -R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} -R\sin\varphi\cos t & -R\cos\varphi\sin t \\ -R\sin\varphi\sin t & R\cos\varphi\cos t \end{matrix}$

$* \quad -R^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2 t - R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2 t = -R^2\sin\varphi\cos\varphi(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1})$