Studiengang Architektur — Mathematisches Denken — HS 2008

Übungsserie 3

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 20. Februar 2008** in der Vorlesung

1. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben.

$$S: \ (s,t) \longmapsto \vec{r}\,(s,t) := \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \end{pmatrix} \qquad (-\infty < s\,,\, t < \infty)$$

   a) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(s_0, t_0)$. Um was für eine Fläche handelt es sich? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat.)

   b) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.

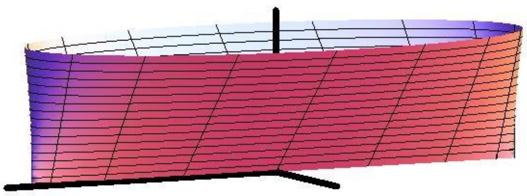
2. In dieser Aufgabe **generieren** Sie eine **Fläche** durch Bewegen und Verändern der Kurve γ. γ ist eine Ellipse mit Mittelpunkt in $(0,0,1)$, deren Halbachsen die Längen $a = 2$ und $b = 1$ aufweisen und die parallel zur x-Achse bzw. y-Achse verlaufen.

   a) Wie lautet eine Parameterdarstellung der Ellipse γ?

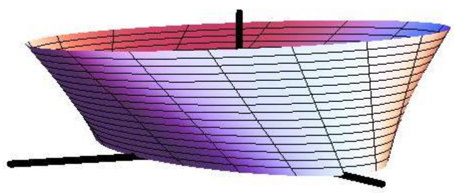
   b) Wird die Ellipse γ in gleichbleibender horizontaler Ausrichtung vertikal nach unten bis zur (x,y)-Ebene verschoben und dabei gleichmässig die Halbachse mit der Länge b verkleinert (d.h. b nimmt linear auf 0 ab), überstreicht sie eine Fläche S. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von S.

   c) Eine andere Fläche $\tilde{S}$ entsteht, wenn bei der Bewegung in Teilaufgabe (b) die Halbachse mit der Länge b gleichmässig auf die Länge 2 vergrössert wird, während die Halbachse mit der Länge a auf 1 verkleinert wird. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von $\tilde{S}$.

   d) Beschreiben Sie eine weitere mögliche Veränderung von a bzw. b und skizzieren Sie die dadurch entstehende Fläche.



Fläche S (Aufgabe 2b)



Fläche $\tilde{S}$ (Aufgabe 2c)

3. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: \ (\varphi,t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi,t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ (1-t)\sin\varphi \\ t\,\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ -\infty < t < \infty)$$

   a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die φ-Linien zu $t = 0$ und $t = 1$. Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)

   b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien. Was für Kurven sind die t-Linien? (Ignorieren Sie in der Aufgabe die Sonderfälle $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$.)

   c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)

   d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.

   e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$. Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat)

Bitte wenden!

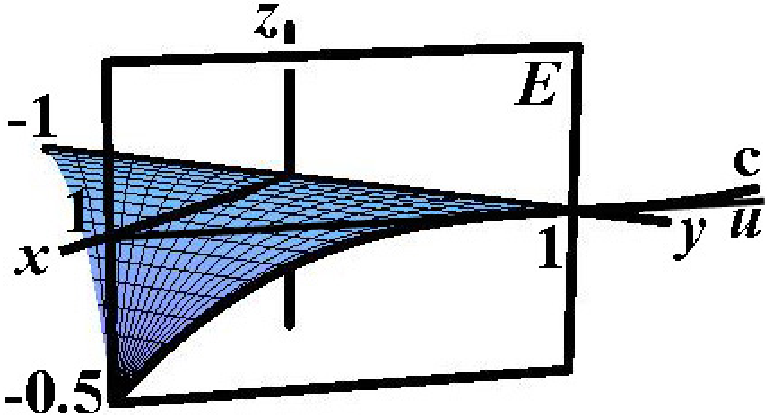
4. Figur 3 zeigt die **Centrum Bank von Vaduz** (Hans Hollein) mit ihrer ansprechenden Dachform. In dieser Aufgabe leiten Sie eine Parameterdarstellung einer Fläche S her, die ungefähr wie die vordere Hälfte der abgebildeten Dachform aussieht. In Figur 4 ist die Fläche S abgebildet: Die Begrenzungskurve c liegt in der Ebene E, die parallel zur z-Achse verläuft. Führt man in E eine u-Achse und eine Kopie der z-Achse ein, wird c durch die Gleichung $z = -au^3$ $(a > 0)$ beschrieben. (Die u-Achse mit Ursprung in $(0, 1, 0)$ zeigt in Richtung $(1, 0, 0)$.)

   a) Finden Sie eine Parameterdarstellung der Kurve c bez. des (x, y, z)-Koordinatensystems. (Tipp: Vereinfachen Sie den Parameter u mithilfe von $t := \frac{u}{\sqrt{2}}$)

   b) Bestimmen Sie mithilfe von (a) eine Parameterdarstellung der Fläche S.

   c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
   Ist die Fläche S abwickelbar? (Kurze Begründung ohne Rechnung)

Figur 3 (Aufgabe 4)



Figur 4 (Aufgabe 4)

① (a) Idee: $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t}$ $\quad \vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(s_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \vec{r}\,'_{s_0}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \text{ konstant!}$$

Es handelt sich um eine Ebene! Denn der Normalenvektor ist in jedem Punkt derselbe, damit ist die Tangentialebene stets dieselbe, und somit gleich der Fläche selbst.

(b) $x = s,\ y = t,\ z = 1 - s - t \rightsquigarrow z = 1 - x - y \leftrightarrow \underline{\underline{x + y + z - 1 = 0}}$

Koord.glch. der Ebene (Skript S. 27)

② (a) Ellipse bez. Mittelpunkt M: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 1\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

bez. O: $\underline{\underline{\vec{r}}} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

(b) Parameter s zur Bewegung / Veränderung: $(0 \le s \le 1)$

Höhe z linear mit s von 1 nach 0: $z(s) = 1 - s$

Halbachse b linear mit s von 1 nach 0: $b(s) = 1 - s$

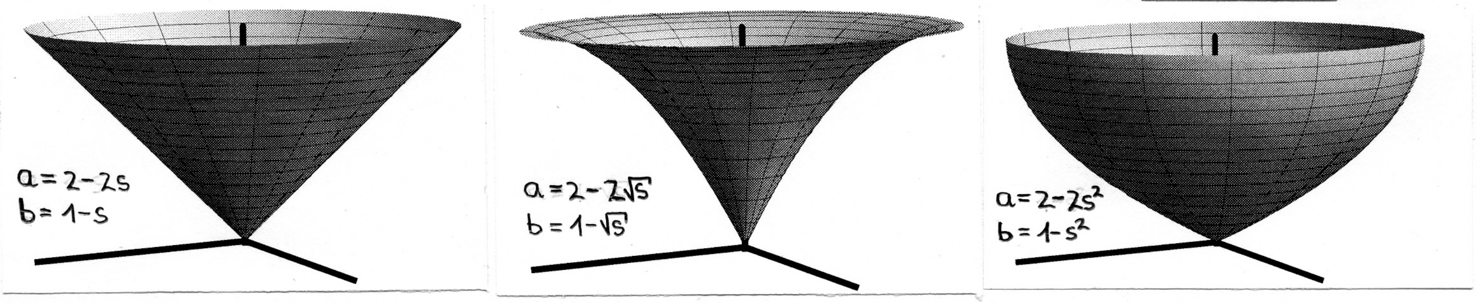
$$\underline{\underline{S: (s,t) \longmapsto \vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ (1-s)\sin t \\ 1-s \end{pmatrix}}} \quad \begin{matrix} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le s \le 1 \end{matrix}$$

(c) z wie oben, b linear mit s von 1 nach 2: $b(s) = 1 + s$

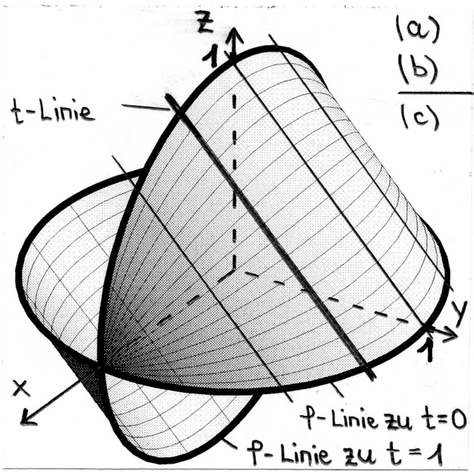
a linear mit s von 2 nach 1: $a(s) = 2 - s$

$$\underline{\underline{\tilde{S}: (s,t) \longmapsto \vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix} (2-s)\cos t \\ (1+s)\sin t \\ 1-s \end{pmatrix}}} \quad \begin{matrix} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le s \le 1 \end{matrix}$$

(d) z.B. gleichzeitig a, b je gleichmässig auf 0 verkleinern $\rightarrow$ Spitze in (0,0,0), die dadurch entstehende Fläche ist ein (Ellipsen-)Kegel (1. Bild)



③ (a)



(a) φ-Linien zu t = 0 bzw. t = 1: Kreis um (0,0,0) mit r = 1 in (x,y)- bzw (x,z)-Ebene

(b) t-Linien sind Geraden (parallel zur (y,z)-Ebene)

(c) S entsteht durch Parallelverschieben einer Geraden entlang den beiden Kreisen (oder einem davon) → Schar gerader Linien! Ist Regelfläche (verallg. Zylinderfläche)

(d) $x = \cos\varphi,\ y = (1-t)\sin\varphi = \sin\varphi - t\sin\varphi = \sin\varphi - z,\ z = t\sin\varphi$

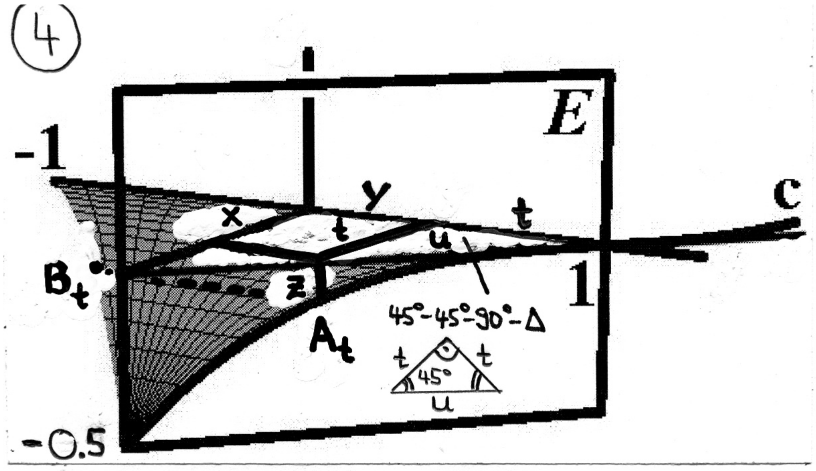
$$x^2 + (y+z)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \rightsquigarrow \underline{\underline{x^2 + (y+z)^2 = 1}}$$

(e) $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ (1-t_0)\cos\varphi_0 \\ t_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ (1-t_0)\cos\varphi_0 \\ t_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t_0)\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + t_0\sin\varphi_0\cos\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sin\varphi_0\cos\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \end{pmatrix}}} \quad (\varphi_0 \ne 0, \pi)$$

$\vec{n}$ ist unabhängig von t, d.h. $\vec{n}$ ist konstant entlang der t-Linie → abwickelbar

(4)



(a) Im 45°-45°-90° Dreieck gilt: $(0 \le u \le \sqrt{2})$

$$t^2 + t^2 = u^2 \rightsquigarrow 2t^2 = u^2 \rightsquigarrow t = \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$x = t = \frac{u}{\sqrt{2}}, \quad y = 1 - t = 1 - \frac{u}{\sqrt{2}}, \quad z = -a u^3$$

Berechnung von a: Im tiefsten Punkt gilt

$$x \overset{\text{soll}}{=} 1 \rightsquigarrow u = \sqrt{2}, \quad \text{Test: } y = 1 - \frac{u}{\sqrt{2}} = 0$$

$u = \sqrt{2}$

$$z \overset{\text{soll}}{=} -0.5 \rightarrow -0.5 = -a\sqrt{2}^3 \rightsquigarrow a = \frac{0.5}{\sqrt{2}^3}$$

also allg $z = -\frac{0.5}{\sqrt{2}^3} u^3 = -0.5 \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^3$

$$c: \quad \underline{\underline{\vec{r}}} = \begin{pmatrix} u/\sqrt{2} \\ 1 - u/\sqrt{2} \\ -0.5\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ -0.5t^3 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } 0 \le u \le \sqrt{2} \text{ bzw. } 0 \le t \le 1$$

(b) Spiegeln des Punkts A_t an der (x,z)-Ebene liefert $B_t: \vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ -(1-t) \\ -0.5t^3 \end{pmatrix}$

Für den (horizontalen) Verbindungsvektor $\overrightarrow{A_t B_t}$ gilt: $\overrightarrow{A_t B_t} = \begin{pmatrix} t \\ -(1-t) \\ -0.5t^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ (1-t) \\ -0.5t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t-2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Parameter s $(0 \le s \le 1)$ für die Linie von A_t nach B_t:

$$\vec{r}(s,t) = \overrightarrow{OA_t} + s\,\overrightarrow{A_t B_t} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ -0.5t^3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2t-2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} t \\ 1-t+s(2t-2) \\ -0.5t^3 \end{pmatrix}}} \qquad \begin{array}{l} 0 \le t \le 1 \\ 0 \le s \le 1 \end{array}$$

(c) S entsteht durch <u>Parallelverschieben</u> eines Geradenstücks entlang der Leitkurve c (oder entlang der Schnittkurve γ von S mit der (x,z)-Ebene) ⇝ Schar gerader Linien! → <u>Regelfläche</u>

Die Leitkurve c (bzw. γ) ist eine <u>ebene</u> Kurve ⇝ S ist eine Verallg. Zylinderfläche und damit <u>abwickelbar</u>.