Übungsserie 4

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 13. März 2009** in der Vorlesung

1. **Platonische Körper**

   (a) Zeichnen Sie das Schrägbild eines hinreichend grossen **Würfels**. Verbinden Sie 4 der 8 Würfelecken mithilfe von Flächendiagonalen so, dass ein reguläres **Tetraeder** entsteht. Verbinden Sie nun die sechs Kantenmitten des regulären Tetraeders so, dass wiederum ein **Körper** entsteht. Um was für einen Körper handelt es sich?

   (b) In welchem Verhältnis stehen die Kantenlängen der drei Körper zueinander?

   (c) Schneidet man von einem Platonischen Körper die Ecken bis zur Kantenmitte ab (d.h. der Schnitt verläuft durch die Mitten der Kanten, die zur jeweiligen Ecke gehören), entsteht wiederum ein Polyeder (Körperstumpf). Beschreiben Sie die fünf möglichen Polyeder (Anzahl Vielecke von welcher Sorte), die entstehen. Welche dieser Polyeder sind gleich? (Diese Polyeder gehören zu den berühmten 13 Archimedischen Körpern.)

2. Verbindet man alle Punkte eines Vielecks mit einem Punkt S ausserhalb der Vieleckebene, so entsteht eine **Pyramide**. Die Vieleckfläche heisst *Grundfläche*.

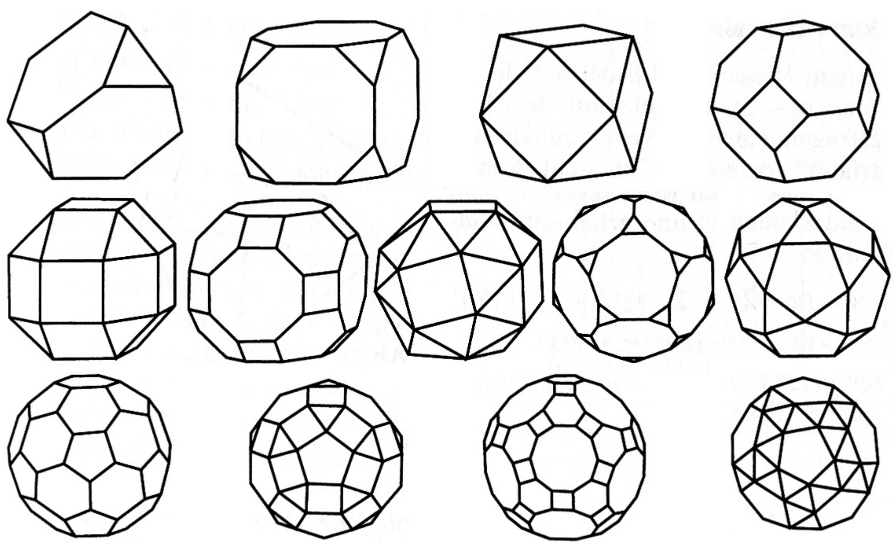
   (a) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat eine Pyramide mit einer n-eckigen Grundfläche? Verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel.

   (b) Skizzieren Sie eine Pyramide, die *nicht konvex* ist und eine andere Pyramide, die *kombinatorisch regulär* aber *nicht regulär* ist.

   (c) Unter welcher Voraussetzung an die Grundfläche ist die Pyramide konvex?

3. (a) Die **Lichtintensität** (Beleuchtungsstärke) einer Lichtquelle ist proportional zur Leistung der Lichtquelle und umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung. Eine Lichtquelle vierfacher Leistung ist 12 m entfernt von einer zweiten Lichtquelle einfacher Leistung. In welchem Abstand von der schwächeren Lichtquelle, auf der Verbindungslinie der beiden, leuchten beide gleich stark?

   (b) Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete, entsteht ein **Kegelkörper**. Um wieviel % vergrössert sich das Volumen des Körpers, wenn die Dreiecksfläche massstäblich unter Wahrung aller Proportionen um 44 % vergrössert wird?



Die 13 Archimedischen Körper.
Im Gegensatz zu PLATON hat ARCHIMEDES die nach ihm benannten Körper selber gefunden.

Übungsserie 4

4. Zeigen Sie, dass durch die abgebildete Konstruktion (Figur 1) aus dem Quadrat $GERD$ mit Seitenlänge a ein **Goldenes Rechteck** $GOLD$ entsteht. (Bei einem so genannten Goldenen Rechteck stehen Länge und Breite zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnitts.)

5. Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus lauter Drei- **und** Vierecken bestehen (nicht unbedingt reguläre) und nur n-kantige Ecken (d.h. in jeder Ecke stossen n Kanten zusammen) besitzen.

   (a) Ein solcher Körper ist der in Figur 2 abgebildete Würfelstumpf. Überprüfen Sie an ihm die **Eulersche Polyederformel**.

   (b) Skizzieren Sie einen solchen Körper bestehend aus zwei Dreiecken, drei Vierecken und lauter dreikantigen Ecken.

   (c) Zeigen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel, dass für $n = 3$ nur Körper mit zwei Dreiecken und drei Vierecken in Frage kommen und für $n \geq 6$ keine solchen Körper existieren.

   (d) Wie viele Dreiecke enthält ein solcher Körper für $n = 4$ und welche Aussage ist dann über die Anzahl Vierecke möglich? (Neben dem in Figur 2 abgebildeten Würfelstumpf existiert auch ein Würfelstumpf mit 8 Dreiecken, 18 Quadraten und lauter vierkantigen Ecken.)

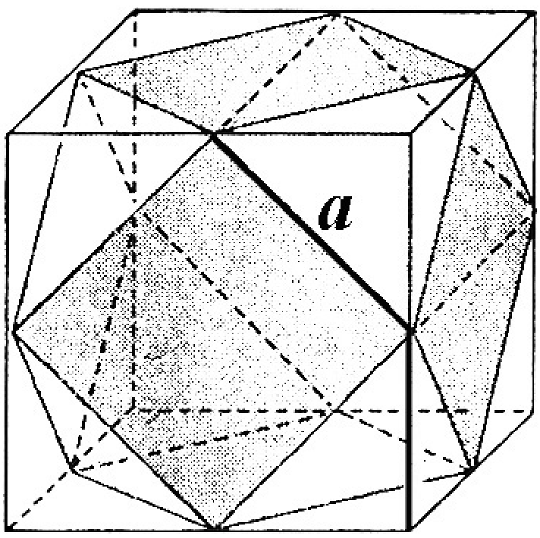
6. Figur 2 zeigt einen **Würfelstumpf**, welcher aus lauter Drei- und Vierecken der Seitenlänge a aufgebaut ist. (Alle Ecken des Würfelstumpfs sind Kantenmitten des Würfels.)

   (a) Wie gross ist das Volumen V des Würfelstumpfs (ausgedrückt durch a).

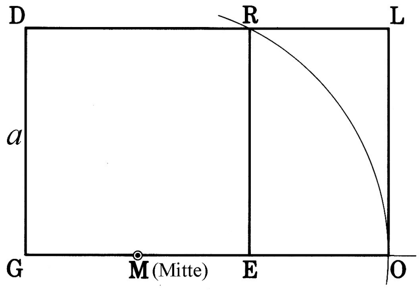
   (b) Berechnen Sie den Radius R der Umkugel und den Radius r der Kantenmittenkugel. (Die Kantenmittenkugel ist diejenige Kugel, die durch alle *Kantenmitten des Würfelstumpfs* geht.)

   (c) Ermitteln Sie den Abstand zweier paralleler Dreieckflächen.

   (d) Der Würfelstumpf stehe mit einer Dreieckfläche auf der Grundrissebene. Skizzieren Sie die Ansicht von oben (den Grundriss). (Von oben nicht sichtbare Kanten weglassen.)

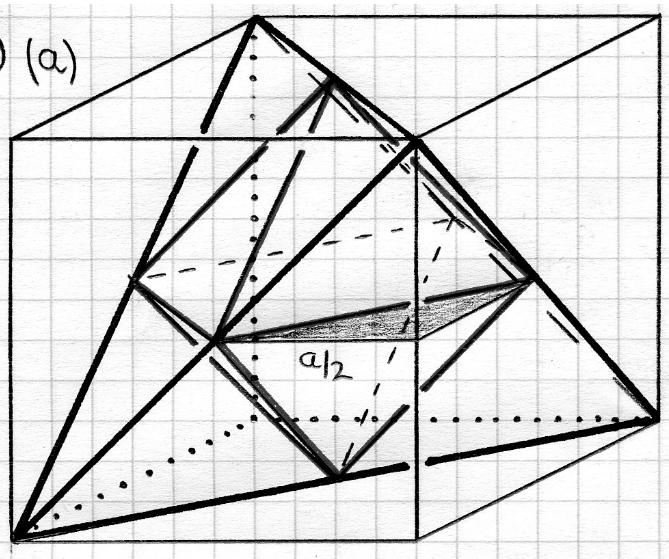


Figur 2 (Aufgabe 5, 6)



Figur 1 (Aufgabe 4)

(1) (a)



Würfel – Tetraeder – Oktaeder (reguläres)

(b) Kantenlängen: Würfel $k_W = a$

Tetraeder: $k_T = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$

Oktaeder: $k_O = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(= \frac{1}{2}k_T\right)$

$(1 : \sqrt{2} : 1/\sqrt{2})$

(c) Tetraederstumpf: reg. Oktaeder (Vgl. (a))

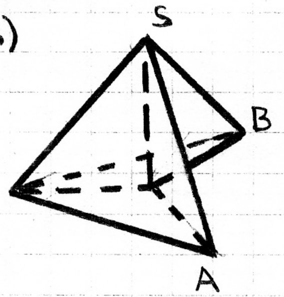
Würfelstumpf: 8 reg. Δ, 6 $\square$ (Figur 2!)] =
Oktaederstumpf: " " "

Dodekaederstumpf: 20 reg Δ, 12 reg ⬠] =
Ikosaederstumpf: " "

(2)

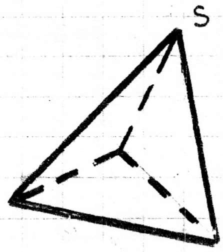
(a) $e = n+1$, $k = 2n$, $f = n+1$ $\quad e-k+f = n+1-2n+n+1 = 2$ Formel gilt für alle Pyramiden

(b)



nicht konvex

z.B. AB gehört nicht zum Körper

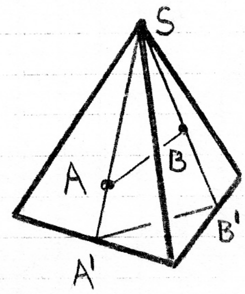


Kombinatorisch regulär

lauter Dreiecke

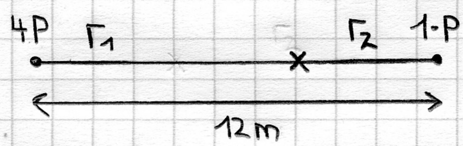
lauter dreikantige Ecken

(Kein reg. Tetraeder)



(c) Die Vieleckfläche (Grundfläche) muss konvex sein! [Sind A, B zwei Punkte des Körpers, A', B' die Schnittpunkte von (SA) und (SB) mit der Grundfläche, so gehören SA', SB' zum Körper und A'B' zur Grundfläche (da konvex). Also gehört die ganze Ebene/Gerade (A'B'S) zum Körper und auch AB.]

(3) (a)

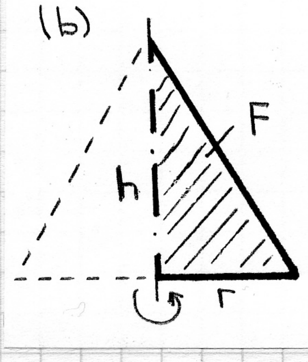


$\underbrace{\text{Intensität 1.LQ}}$ $\underbrace{\text{Intens. 2.LQ}}$

$\text{Konst}\,\frac{4P}{r_1^2} = \text{konst}\,\frac{1P}{r_2^2} \rightsquigarrow 4 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2,\ 2r_2 = r_1$

da $12m = r_1 + r_2 = 2r_2 + r_2 \rightsquigarrow \underline{\underline{r_2 = 4m}}\ (r_1 = 8m)$

(b)



λ: Massstäblicher Vergrösserungsfaktor;

(2 nachher; 1 vorher)

Fläche $\quad F_2 = \lambda^2 F_1 \overset{\text{soll}}{=} 1.44\,F_1 \rightsquigarrow \lambda = 1.2$

Radius $\quad r_2 = \lambda r_1$

Höhe $\quad h_2 = \lambda h_1$

Volumen $\quad V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \lambda^3 V_1 = 1.728 \cdot V_1 \rightsquigarrow \underline{\underline{72.8\%}}$

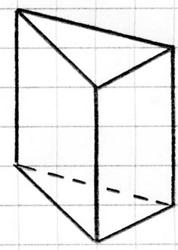
(4)

Idee: GOLD Goldenes Rechteck $\leftrightarrow \frac{|GO|}{|GD|} = \frac{|GO|}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zu zeigen!

Pythagoras: $|MR| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

Rechtecklänge: $|GO| = |GM| + |MR| = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$

(5) (a) $e = 12$, $k = 24$, $f = 14$ $\quad e-k+f = 12-24+14 = 2$ ✓ (b)



(c) f_3, f_4 : Anzahl 3- bzw. 4-Ecke

① $n \cdot e = 2k$ (In jeder Ecke stossen n Kanten zusammen, jede wird dabei zweimal gezählt)

② $3 \cdot f_3 + 4f_4 = 2k$ (Jedes 3-Eck hat 3 Kanten, jedes 4-Eck 4, jede wird dabei doppelt gezählt)

③ $f_3 + f_4 = f$

$$\underset{\sim}{2} = e-k+f = \frac{2k}{n} - k + f = \frac{3}{n}f_3 + \frac{4}{n}f_4 - \frac{3}{2}f_3 - 2f_4 + f_3 + f_4 = \underline{\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{2}\right)f_3 + \left(\frac{4}{n}-1\right)f_4}$$

$n=3$: $\quad 2 = \frac{1}{2}f_3 + \frac{1}{3}f_4 \longleftrightarrow 12 = 3f_3 + 2f_4$

Alle Mögl.keiten sind:

f_3	f_4	Bem
4	0	unerlaubt: Keine 4-Ecke
$\underline{\underline{2}}$	$\underline{\underline{3}}$	wie behauptet (Figur (b))
0	6	unerlaubt: Keine 3-Ecke

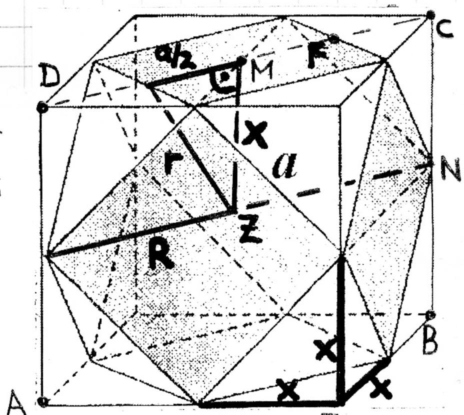
$n \geq 6$: $\quad \underbrace{\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{2}\right)}_{\leq 0} f_3 + \underbrace{\left(\frac{4}{n}-1\right)}_{\leq 0} f_4 \leq 0 < 2$, alle $f_3, f_4 \in \mathbb{N}$

(d) $n=4$: $\quad 2 = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)f_3 + (1-1)f_4 = \frac{1}{4}f_3 \quad \rightsquigarrow f_3 = 8$ (Anz. 3-Ecke)

f_4 keine Aussage

---

(6)



(a) Kantenlänge des Würfels: $2x = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,a$, denn: $\overbrace{x^2 + x^2}^{2x^2} = a^2$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Vol. des Würfels: $(2x)^3 = 8x^3 \ (= 2\sqrt{2}\,a^3)$

Vol. einer Eckpyr: $\frac{1}{3} \cdot \frac{x \cdot x}{2} \cdot x = \frac{1}{6}x^3 \ \left(= \frac{1}{12\sqrt{2}}a^3\right)$

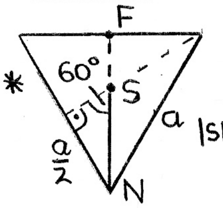
Vol. Stumpf: $V = 8x^3 - 8 \cdot \frac{1}{6}x^3 = \frac{20}{3}x^3 = \frac{10}{3\sqrt{2}}a^3 = \underline{\underline{\frac{5}{3}\sqrt{2}\,a^3}}$

(b) Mittelpt. beider Kugeln ist der Würfelmittelpt. Z

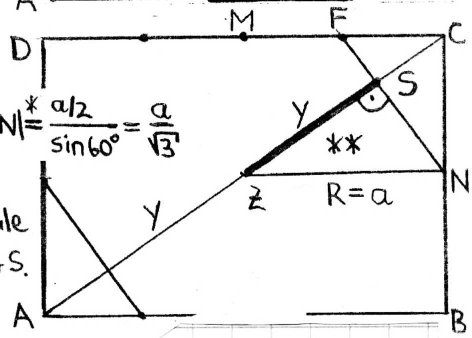
$R = \frac{1}{2}$ Würfelflächendiagonale $= 2 \cdot \frac{a}{2} = \underline{\underline{a}}$

$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}a}}$

*



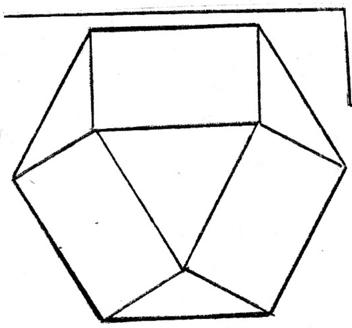
$|SN| \overset{*}{=} \frac{a/2}{\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}}$



(c) Im Schnitt durch die Diagonalfläche betrachten! Die Raumdiagonale CA steht ⊥ auf die Dreiecksfläche und durchstösst sie im △Mittelpt S.

$y \overset{**}{=} \sqrt{\underbrace{|ZN|^2}_{a^2} - \underbrace{|SN|^2}_{a^2/3}} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$, $2y = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a}}$

(d)



regelmässiges 6-Eck als Umriss, gleichseitiges △ im Zentrum, dazwischen Rechtecke