Übungsserie 5

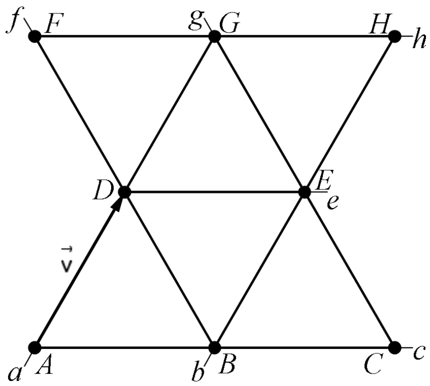
Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 8. Mai 2009** in der Vorlesung

1. **Abbildungstraining:** Figur 1 zeigt ein Netz von gleichseitigen Dreiecken mit den Gitterpunkten $A, \ldots, H$, mit den Gittergeraden $a, \ldots, h$ und mit dem Vektor $\vec{v}$.

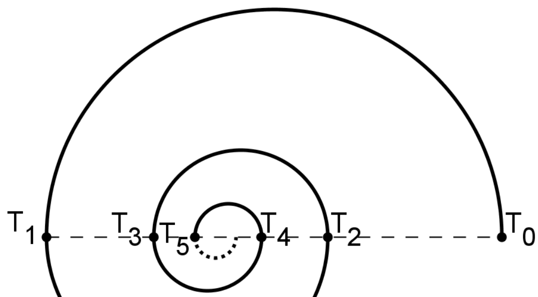
   (a) Geben Sie eine Translation an, welche den Punkt B auf den Punkt H abbildet; eine Spiegelung, welche H auf D abbildet und eine Rotation, welche D auf C abbildet. (Verwenden Sie dazu nur die in Figur 1 vorhandenen, beschrifteten Objekte.)

   (b) Der Punkt A soll durch eine Rotation auf den Punkt E abgebildet werden. Geben Sie drei Lösungen mit drei verschiedenen Drehzentren (ausgewählt aus $A, \ldots, H$) an.

   (c) Sei $T = R_{E,120^\circ} \circ R_{D,120^\circ} \circ R_{B,120^\circ}$. Bestimmen Sie die Bilder $T(C)$, $T(E)$ von C bzw. E. Um was für eine besondere Transformation handelt es sich vermutlich?



Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. Die Strecke T_0T_1 hat die Länge s (Figur 2). Der Punkt T_2 teilt die Strecke T_1T_0 nach dem Goldenen Schnitt. T_3 teilt T_2T_1 nach dem Goldenen Schnitt, T_4 die Strecke T_3T_2 usw. (Dabei liege der Major jeweils stets beim erstgenannten Punkt der Strecke.) Über jeder dieser Strecken ist ein Halbkreis gezeichnet, wodurch die **Halbkreis-Spirale** $T_0T_1T_2T_3T_4T_5\ldots$ entsteht.

   (a) Berechnen Sie die Länge der Halbkreis-Spirale (ausgedrückt durch s) durch Ausnutzen der „Selbstähnlichkeit". (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)

   (b) Bestimmen Sie die Lage des Zentrums der Spirale, d.h. den Abstand x des Zentrums vom Punkt T_0 (ausgedrückt durch s). Kommentar?

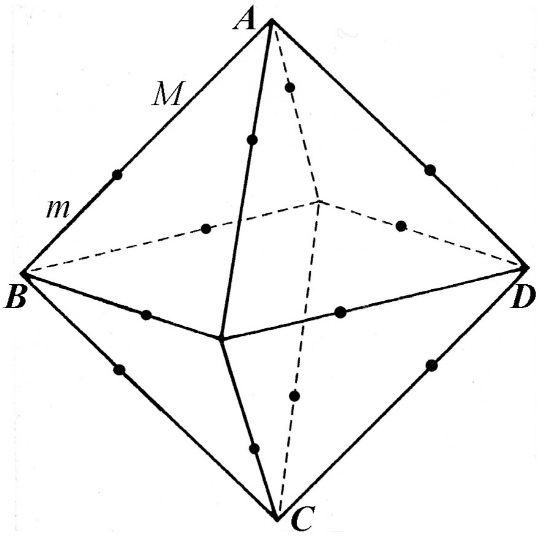
3. Symmetrien des **Quadrates** (des regulären Vierecks)

   (a) Ermitteln Sie alle acht Kongruenztransformationen, welche ein Quadrat $ABCD$ mit sich selbst zur Deckung bringen. (Bezeichnungen im Quadrat: a, b Mittelsenkrechten von AB bzw. AD, c = Diagonale durch A und C, d = Diagonale durch B und D, Z = Mittelpunkt)

   (b) Stellen Sie die zugehörige **Verknüpfungstafel** auf bzw. zur Vereinfachung nur den 'rechten, oberen Teil der Tafel bis und mit der Diagonale'.

4. (a) Zeigen Sie: Werden die Kanten eines **regulären Oktaeders** in geeigneter Weise nach dem Goldenen Schnitt geteilt, so sind die zwölf entstehenden Punkte die Ecken eines **regulären Ikosaeders** (Figur 3). (Anleitung: Benutzen Sie den Sachverhalt von Aufgabe 2.5 (vgl. Skript zur Vorlesung, S. 69))

(b) Berechnen Sie den Volumenunterschied zwischen Oktaeder und Ikosaeder (ausgedrückt durch m, die Länge des Minors der Oktaederkantenlänge).



Figur 3 (Aufgabe 4)

Figur 4 (Aufgabe 6)

5. Im Jahre 1202 erschien das Buch 'Liber abaci' (Buch über die Rechenkunst) von Leonardo von Pisa, genannt **Fibonacci**. Berühmt wurde dieses Buch (und mit ihm sein Verfasser) durch die folgende Aufgabe über Kaninchenpaare: Wir nehmen an, dass Kaninchen beliebig lang leben und dass im 1. Monat genau ein (neugeborenes) Paar vorhanden ist. In der Folge wird jedes Kaninchenpaar nach Ablauf von einem Monat gebärfähig und bringt von da an jeden weiteren Monat ein neues Paar zur Welt.

   (a) Bezeichne a_n die Anzahl Kaninchenpaare, die im n-ten Monat vorhanden sind. Berechnen Sie $a_1, \ldots, a_6$, und begründen Sie, dass gilt: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

   (b) Durch $b_1 := 1$ und $b_n := \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ werden Zahlen $b_1, b_2, b_3 \ldots$ definiert. Berechnen Sie $b_1, \ldots, b_6$ und zeigen Sie, dass für die Zahlen b_n das Bildungsgesetz $b_{n+1} = \dfrac{1}{1+b_n}$ gilt. (Aus diesem Bildungsgesetz ergibt sich die Kettenbruchdarstellung der Zahlen: $b_2 = \frac{1}{1+b_1} = \frac{1}{1+1}$, $b_3 = \frac{1}{1+b_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$, $b_4 = \frac{1}{1+b_3} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \ldots$)

   (c) Die Zahlen b_{n+1} (und damit ihre Kettenbrüche) nähern sich für $n \to \infty$ immer mehr einem speziellen Wert an. Welchem? Begründen Sie Ihre Antwort!

6. *Darf eine Plastik (oder ein Lebewesen) massstäblich vergrössert werden oder muss man damit rechnen, dass die Plastik (oder das Lebewesen) im Boden einsinkt?* Eine **Plastik** bestehe aus 5 aufeinander gestellten Würfeln und habe insgesamt eine Höhe von $H = 1\,\mathrm{m}$.

   (a) Welche Grundfläche hat die Plastik, wenn sie massstäblich um den Faktor 100 vergrössert wird? Dies entspricht in etwa der Höhe der Freiheitsstatue. (Figur 4)

   (b) Welche Grundfläche müsste die vergrösserte Plastik haben, damit der Bodendruck (Druck = Kraft / Fläche) unverändert bleibt?

   (c) Eine Vergrösserung der Höhe H um den Faktor λ bedeutet unter Berücksichtigung eines gleichbleibenden Bodendrucks eine Vergrösserung der Grundfläche um den Faktor λ^p. Wie gross ist p?

Übungsserie 5, FS 2009 Seite 1

(1) (a) $\underline{\underline{T_{2\vec{v}}}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} : B \longmapsto H$; $\underline{\underline{S_g}} : H \longmapsto D$; $\underline{\underline{R_{E,120^\circ}}} : D \longmapsto C$

(b) $R_{D,120^\circ} = R_{D,-240^\circ}$, $R_{B,-120^\circ} = R_{B,240^\circ}$, $R_{F,60^\circ} = R_{F,-300^\circ}$

(c) $T : C \xmapsto[R_{B,120^\circ}]{} D \xmapsto[R_{D,120^\circ}]{} D \xmapsto[R_{E,120^\circ}]{} C$, T ist gleichsinnig (da Hintereinanderausführung von 3 Rotationen $\rightsquigarrow$ keine Spiegelung

$T : E \longmapsto A \longmapsto E \longmapsto E$ T hat 2 Fixpunkte $\rightsquigarrow$ keine Rotation mit $0 < \alpha < 360^\circ$

T die <u>Identität</u> : $T = I$

(2) (a) Jeder nachfolgende Halbkreis ist eine massstäbliche Verkleinerung des vorhergehenden mit Faktor $\lambda = \frac{1}{\phi}$ (Verhältnis des GS: $\frac{\text{Strecke}}{\text{Major}} = \frac{\text{Major}}{\text{Minor}} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

$$L = \widehat{T_0T_1} + \widehat{T_1T_2} + \widehat{T_2T_3} + \ldots = \widehat{T_0T_1} + \frac{1}{\phi}\widehat{T_0T_1} + \frac{1}{\phi}\widehat{T_1T_2} + \ldots = \widehat{T_0T_1} + \frac{1}{\phi}\Big[\overbrace{\widehat{T_0T_1} + \widehat{T_1T_2} + \ldots}^{L}\Big]$$

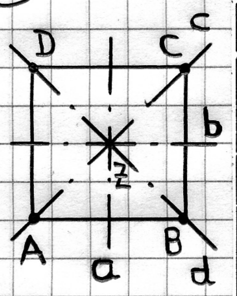
$$L = \widehat{T_0T_1} + \frac{1}{\phi}L \leftrightarrow L - \frac{1}{\phi}L = \frac{1}{2}\pi s \ , \ L = \frac{1/2\,\pi s}{1 - 1/\phi} = \frac{\pi\phi s}{2(\phi - 1)} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}+3}{4}\pi s}}$$

(b)
$$x = T_0T_1 - T_1T_2 + T_2T_3 - \ldots = T_0T_1 - \frac{1}{\phi}T_0T_1 + \frac{1}{\phi}T_2T_3 - \ldots = T_0T_1 - \frac{1}{\phi}\big(\underbrace{T_0T_1 - T_2T_3 + \ldots}_{x}\big)$$

$$x = s - \frac{1}{\phi}x \leftrightarrow x + \frac{1}{\phi}x = s \ , \ x = \frac{s}{1 + 1/\phi} = \frac{\phi}{\phi + 1}s = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}s}}$$

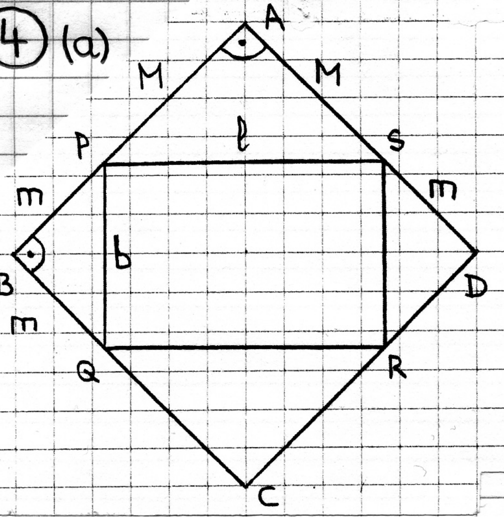
$\rightsquigarrow$ x ist der Major von $s = |T_0T_1|$

(3) (a) I ; $R_{Z,90^\circ}$; $R_{Z,180^\circ}$; $R_{Z,270^\circ}$; S_a ; S_b ; S_c ; S_d



$\circ$	I	$R_{Z,90^\circ}$	$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$	S_a	S_b	S_c	S_d
I	I	$R_{Z,90^\circ}$	$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$	S_a	S_b	S_c	S_d
$R_{Z,90^\circ}$		$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$	I	S_d	S_c	S_a	S_b
$R_{Z,180^\circ}$			I	$R_{Z,90^\circ}$	S_b	S_a	S_d	S_c
$R_{Z,270^\circ}$				$R_{Z,180^\circ}$	S_c	S_d	S_b	S_a
S_a					I	$R_{Z,180^\circ}$	$R_{Z,90^\circ}$	$R_{Z,270^\circ}$
S_b						I	$R_{Z,270^\circ}$	$R_{Z,90^\circ}$
S_c							I	$R_{Z,180^\circ}$
S_d								I

(4) (a)

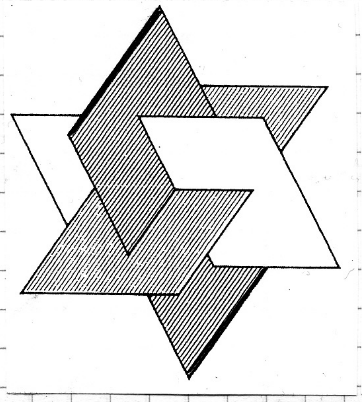


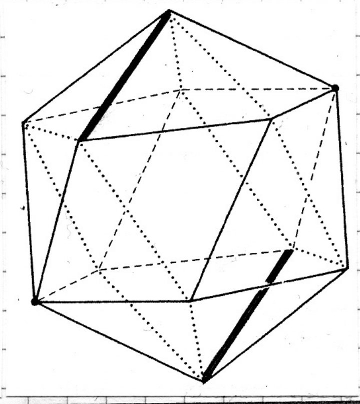
Die 6 Ecken und 12 Kanten des Oktaeders sind genau die Ecken und Seiten dreier paarweise <u>senkrecht</u> aufeinanderstehender <u>Quadrate</u>. In jedem Quadrat (z.B. ABCD) bilden die 4 Punkte (PQRS) ein <u>Goldenes Rechteck</u>:

$$\frac{l}{b} = \frac{\sqrt{M^2 + M^2}}{\sqrt{m^2 + m^2}} = \frac{\sqrt{2M^2}}{\sqrt{2m^2}} = \frac{\sqrt{2}\,M}{\sqrt{2}\,m} = \frac{M}{m} = \phi \quad \text{Verhältnis des GS.}$$

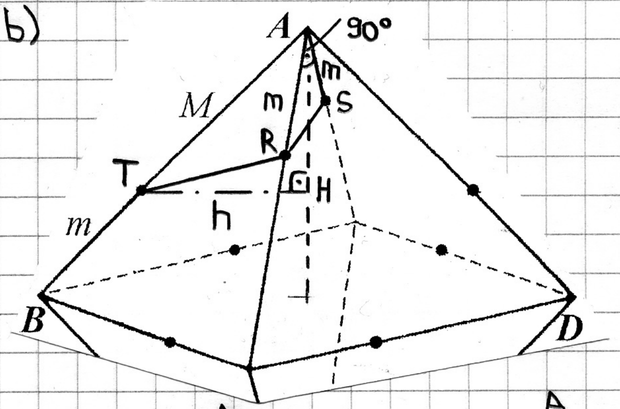
Gemäss Agb 2.5 bilden drei paarweise senkrecht aufeinanderstehende Goldene Rechtecke (Abbildung siehe nächste Seite) ein reguläres Ikosaeder.

4



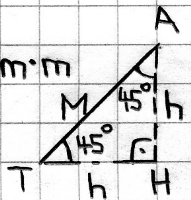


(b)



Vol.unterschied $= 6\cdot 2\cdot V_{RSAT}$, Pyramide RSAT: Grundfläche

$\rightsquigarrow \frac{1}{2} m\cdot m$



$= 12\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} m^2 \frac{M}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, m^2 M$

Höhe: $h^2 + h^2 = M^2$, $h = \frac{M}{\sqrt{2}}$

$= \underline{\underline{\sqrt{2}\,\phi\, m^3}}$, da $M = \phi m$

Vol.: $\frac{1}{3} G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} m^2\cdot\frac{M}{\sqrt{2}}$

5

Monat: $o \,\hat{=}$ nicht gebärfähig, $x \,\hat{=}$ gebärfähig, ↘ Gebärt

(a)

	Monat		
	1	o	$a_1 = 1$
	2	x ↘	$a_2 = 1$
z.B. ↓	3	x ↘ o	$a_3 = 2$
n	4	x o x	$a_4 = 3$
$n+1$	5	x o x x o	$a_5 = 5$
$n+2$	6	x o x x o x o x	$a_6 = 8$

Im $(n+1)$-ten Monat (z.B. $n+1=5$) gibt es a_{n+1} $(=5)$ Kaninchenpaare. Von diesen sind $\overset{3}{\overset{\shortparallel}{a_n}}$ gebärfähig, nämlich diejenigen, die im $\overset{4}{\overset{\shortparallel}{n}}$-ten Monat gelebt haben. Im $\overset{6}{\overset{\shortparallel}{(n+2)}}$-ten Monat kommen zu $\overset{5}{\overset{\shortparallel}{a_{n+1}}}$ genau $\overset{3}{\overset{\shortparallel}{a_n}}$ neugeborene Paare dazu: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(b) $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{1} = 1$, $b_3 = \frac{1}{2}$, $b_4 = \frac{2}{3}$, $b_5 = \frac{3}{5}$, $b_6 = \frac{5}{8}$

$$\frac{1}{1+b_{n+1}} \underset{\text{Def}}{=} \frac{1}{1+\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1\cdot a_{n+1}}{\left(1+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = b_{n+2}$$

Erweitern mit a_{n+1} — Bildungsgesetz a_n

(c) Nach Satz 2.8 gilt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \phi$ und somit $b_n = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-1} \longrightarrow \underline{\underline{\phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

Bem: Also gilt für den unendl. Kettenbruch:
(Kettenbruchdarstellung des Gold. Schnitts)

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}} = \phi^{-1}$$

6

(a) Würfelkantenlänge: $a = \frac{H}{5} = 0.2\,\text{m}$; Vergrössert: $a' = \frac{H'}{5} = \frac{\overset{100}{\overset{\shortparallel}{\lambda}} H}{5} = \lambda a = 20\,\text{m} \rightsquigarrow \underline{\underline{400\,\text{m}^2}}$

(b) Volumen: $V' = (a')^2 H' = (\lambda a)^2 \lambda H = \lambda^3 a^2 H = \lambda^3 V$

Gewichtskraft: $F_G' = m'g = \rho V' g = \rho \lambda^3 V g = \lambda^3 \rho V g = \lambda^3 F_G$

Druck $= \frac{F_G}{a^2} \underset{\uparrow}{=} \frac{F_G'}{G'}$ $\rightsquigarrow G' = \frac{F_G'}{F_G} a^2 = \frac{\lambda^3 F_G}{F_G} a^2 = \lambda^3 a^2 = \underline{\underline{40'000\,\text{m}^2}}$

unverändert

(c) $G' = \lambda^3 a^2 = \lambda^3 G$, also $\underline{\underline{p = 3}}$ (Bem: Seitenlänge $(a')^2 = \lambda^3 a^2$, $a' = \lambda^{3/2} a$)