Übungsserie 1

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 16. Oktober 2009** in der Vorlesung

1. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Raumkurve** γ beschrieben

$$\gamma :]-\infty,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie γ und ihren Grundriss γ' in ein räumliches Koordinatensystem. Um was für spezielle Kurven handelt es sich?

   (b) Welchen t-Wert hat der Schnittpunkt von γ mit der (x, y)-Ebene bzw. jener mit der (y, z)-Ebene? Welche Koordinaten haben diese Punkte?

   (c) Bestimmen Sie eine Gleichung von γ' (aufgefasst als Kurve in der (x, y)-Ebene) in der Form $y = f(x)$.

2. Der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ wird **Parabel** genannt (die y-Achse heisst *Parabelachse*, der Schnittpunkt von Parabel und Parabelachse heisst *Scheitel*). Die Tangente t_p im Parabelpunkt $P = (x_P, y_P)$ hat (ohne Beweis) die Parametergleichung

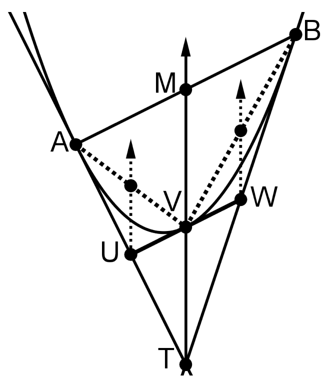
$$t_p :]-\infty,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p + t \\ y_p + 2tx_p \end{pmatrix}.$$

   (a) Wie lauten konkret die Parametergleichungen der Tangenten t_A , t_B in den Parabelpunkten $A = (-1, ?)$ und $B = (2, ?)$? (Verwenden Sie als Parameter t für t_A , t^* für t_B)

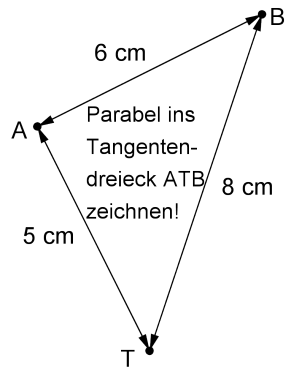
   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Tangentenschnittpunktes T von t_A und t_B.

   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Parabelsehne AB.
   Dies zeigt: Die Parallele zur Parabelachse durch den Tangentenschnittpunkt T verläuft durch die Parabelsehnen**mitte** M und „umgekehrt". Dieser Sachverhalt gilt **allgemein** und für **jede** Parabel.

   (d) Benutzen Sie folgenden Satz, um in Figur 1 die Parabel Punkt für Punkt „schön zu zeichnen". SATZ: Die **Mittellinie** UW im Tangentendreieck ATB ist eine Parabeltangente. Ihr **Mittelpunkt** V ist der Berührpunkt und auch die Mitte von TM.



Beweis des Satzes: Im Tangentendreieck ATB ist TM gemäss (c) eine Parabelachsenparallele. Im Schnittpunkt V von TM mit der Parabel wird die Parabeltangente gezeichnet. Sie schneide TA in U und TB in W. AUV und VWB sind wiederum Tangentendreiecke. Gemäss (c) verlaufen die Achsenparallelen durch U bzw. W durch die Sehnenmitten. Strahlensatzüberlegungen zeigen: U halbiert TA, W halbiert TB, UW ist parallel zu AB, V halbiert UW und auch TM.



Figur 1 (Aufgabe 1)

3. Eine **Raupe** befindet sich zur Zeit $t = 0$ (12 : 00 Uhr) in der Mitte einer Uhr auf dem Minutenzeiger. Während der Minutenzeiger sich gleichmässig um den Mittelpunkt dreht, kriecht die Raupe auf dem Zeiger mit 2 cm/min nach aussen. Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve, die die Raupe in Bezug zum Zifferblatt (Koordinatenebene) beschreibt.

4. **Ableitungstraining:** Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

(a) $x(t) = t - 1$	(b) $y(t) = 2t - 1$	(c) $y(t) = R\cos\left(\frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}\,t\right)$
(d) $x(t) = at\cos t$	(e) $y(t) = tR\sin\varphi$	(f) $y(\varphi) = tR\sin\varphi$
(g) $z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi$	(h) $z(t) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi$	(i) $y(\varphi) = e^{\varphi}\sin\varphi$

5. Rollt ein Kreis vom Radius R in der (x, y)-Ebene auf der x-Achse in positiver Richtung, beschreibt ein fester Punkt P auf dem Kreis eine Kurve γ (gewöhnl. **Zykloide**), Figur 2.

   (a) Wie lautet eine Parameterdarstellung von γ, wenn P zu Beginn im Ursprung O liegt?

   (b) Skizzieren Sie den ungefähren weiteren Verlauf der Kurve γ ($R = 1.5$ cm). Achten Sie auf Symmetrien, Spitzen und die Abstände zwischen den Spitzen.

   Die Zykloide ist in der Physik von Bedeutung. Für die an der x-Achse nach unten gespiegelte Kurve gilt: Sie ist diejenige Kurve, auf der ein reibungsfrei gleitender Körper am schnellsten von einem Punkt O zu einem schräg darunter liegenden Punkt P gelangt. Ferner ist sie diejenige Kurve, auf welcher ein reibungsfrei gleitender Körper immer gleich lang bis zum tiefsten Punkt hat, egal von welcher Höhe er beginnt.

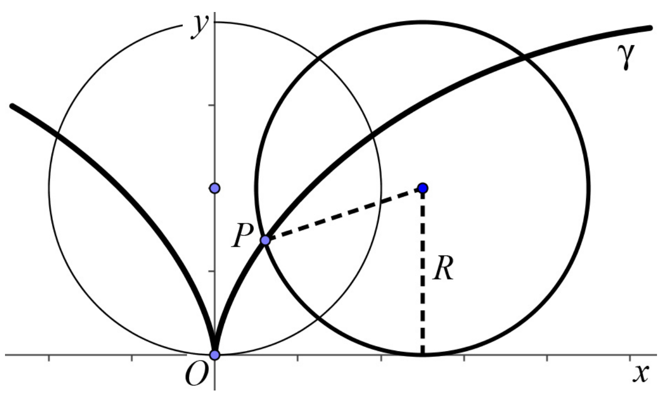
6. Eine Stange steckt unter dem Neigungswinkel 45° im horizontalen Boden. Eine **Kugel** vom Radius R wird nun auf dem Boden liegend so um die Stange herumgeführt, dass sie die Stange stets berührt (Figur 3). Dabei beschreibt der Kugelmittelpunkt M eine ebene, geschlossene Kurve γ mit dem Symmetriezentrum O. Im Folgenden wird die senkrechte Projektion der Stange auf die Kurvenebene als x-Achsenrichtung gewählt, als Ursprung wird O festgelegt.

   (a) Wie gross ist der grösste bzw. der kleinste Abstand von M bezüglich O?

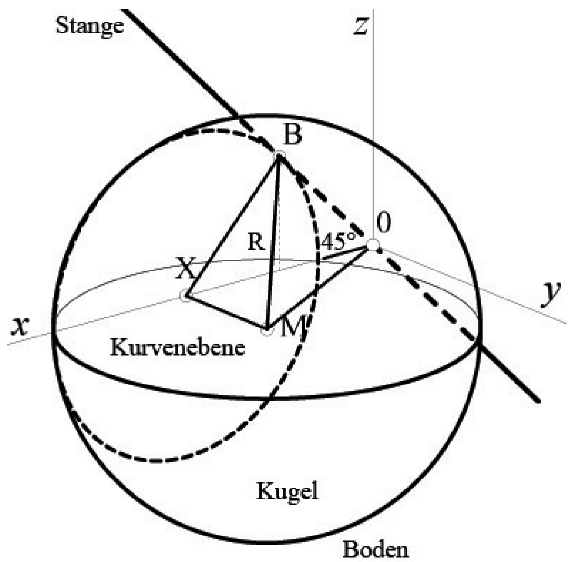
   (b) Die Kugel berührt die Stange im Punkt B und hat mit der (x, z)-Ebene den Schnittkreis k gemeinsam. Der Mittelpunkt von k wird mit X bezeichnet. Begründen Sie, dass stets gilt: $|OX| = \sqrt{2} \cdot |OB|$.

   (c) Der Kugelmittelpunkt hat die Koordinaten $M = (x, y)$. Leiten Sie eine Gleichung in x und y für die Kurve γ her. (Tipp: Betrachten Sie dazu das Dreieck MOB.) Um was für eine Kurve handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente.)

   (d) γ lässt sich auch als ebener Schnitt einer Zylinderfläche auffassen. Geben Sie den Zylinder und die Schnittebene an.



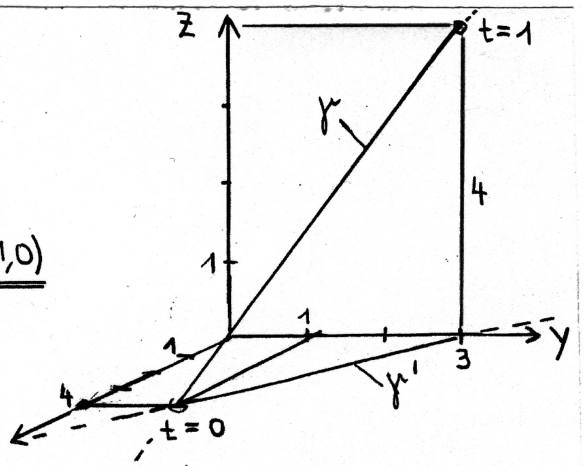
Figur 2 (Aufgabe 5)



Figur 3 (Aufgabe 6)

Übungsserie 1 HS 09, Seite 1

1 (a) **Geraden!** $\left(\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4t \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$



(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{t=0}}$, in $\left.\begin{matrix} x(t) = 4-0 = 4 \\ y(t) = 0+1 = 1 \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \underline{\underline{(4,1,0)}}$

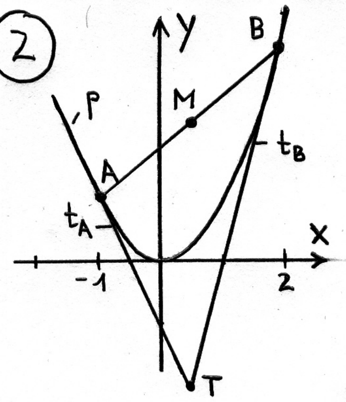
$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{t=1}}$, in $\left.\begin{matrix} x(t) = 0 \\ y(t) = 3 \\ z(t) = 4 \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \underline{\underline{(0,3,4)}}$

(c) γ': $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ (kein z)

$x(t) = 4-4t$, $4t = 4-x$, $t = 1-\frac{x}{4}$, in $y(t)$

$y(t) = 2\cdot\left(1-\frac{x}{4}\right)+1 = -\frac{x}{2}+3$, $\underline{\underline{y = -\frac{x}{2}+3}}$

2



(a) $A \in$ Parabel p: $y_A = x_A^2 = 1 \rightsquigarrow A(-1,1)$, $B \in p$: $y_B = x_B^2 = 4 \rightsquigarrow B(2,4)$

$t_A:]-\infty,\infty[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{r}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1+t \\ 1-2t \end{pmatrix}}}$, $t_B:]-\infty,\infty[\to \mathbb{R}^2$, $t^* \mapsto \vec{r}_A(t^*) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2+t^* \\ 4+4t^* \end{pmatrix}}}$

(b) $T \in t_A$, d.h. es gibt t mit $\overrightarrow{OT} = \vec{r}_A(t)$; $T \in t_B$, d.h. es gibt t^* mit $\overrightarrow{OT} = \vec{r}_B(t^*)$

also $\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t^*)$: $\begin{matrix} -1+t = x_T = 2+t^* \\ 1-2t = y_T = 4+4t^* \end{matrix} \rightsquigarrow t = 3+t^*$, in 2. Glch einsetzen:

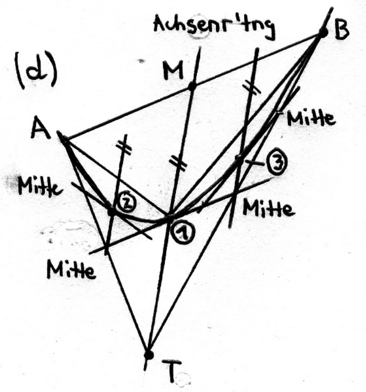
$1-6-2t^* = 4+4t^*$

$-9 = 6t^* \rightsquigarrow t^* = -1.5$

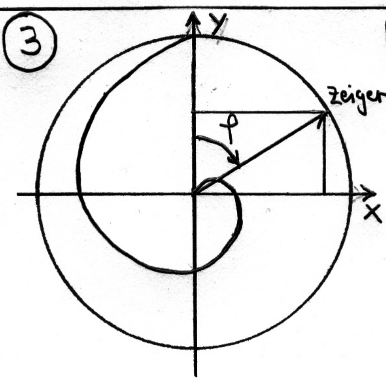
$\overrightarrow{OT} = \vec{r}_B(-1.5) = \begin{pmatrix} 2-1.5 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{T(0.5,-2)}}$

(c) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{M(0.5, 2.5)}}$ [$x_M = x_T$! (TM) ∥ y-Achse]

(d)



3



KS: Ursprung in der Uhrenmitte, y-Achse in Richtung 12 Uh

t: Kriechzeit der Raupe in min

Nach der Zeit t: Radius r = Kriechstrecke $= 2\frac{\text{cm}}{\text{min}}\cdot t$

Zeigerwinkel $\varphi = \frac{360°}{60\,\text{min}}\,t = 6°/\text{min}\cdot t$ oder $\frac{2\pi}{60\,\text{min}}\cdot t$

x-Wert: $x = r\sin\varphi$ (Gegenkathete), y-Wert: $y = r\cos\varphi$ (Ankathe

Kurve: $t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{\text{cm}}{\text{min}}\,t\,\sin\left(\frac{2\pi}{60\,\text{min}}t\right) \\ 2\frac{\text{cm}}{\text{min}}\,t\,\cos\left(\frac{2\pi}{60\,\text{min}}t\right) \end{pmatrix}$ t:

---

4 Zur Erinnerung die Regeln: ① $(x^n)' = nx^{n-1}$, speziell: $(x^1)' = 1\cdot x^0 = 1$, $(\text{Zahl})' = 0$ ② $(f+g)' = f'+g'$ inne

③ $(\text{Zahl}\cdot f)' = \text{Zahl}\cdot f'$ ④ $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$ ⑤ $(f\cdot g)' = f'\cdot g + fg'$ ⑥ $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$

(a) $x'(t) = (t-1)' \overset{②}{=} (t)' - (1)' \overset{①}{=} \underline{\underline{1}}$ (b) $y'(t) = (2t-1)' \underset{②}{=} (2t)' - (1)' \overset{③}{=} 2(t)' - (1)' \overset{①}{=} \underline{\underline{2}}$

(c) $y'(t) = \Big(R\underbrace{\cos}_{f(\cdot)}\underbrace{\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)}_{g(t)}\Big)' \overset{④}{\underset{⑥}{=}} R\left(-\sin\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)\right)\cdot\underbrace{\left(\tfrac{2\pi}{60s}\cdot t\right)'}_{\text{innere Abl}} \overset{①}{=} -R\sin\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)\tfrac{2\pi}{60s} = \underline{\underline{-\tfrac{2\pi R}{60s}\sin\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)}}$

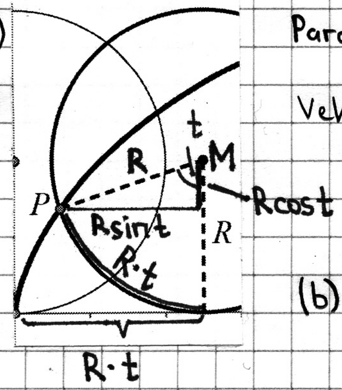
(d) $x'(t) = (a\underbrace{t\cos t}_{f\cdot g})' \overset{③}{\underset{⑤}{=}} a[\underbrace{(t)'\cos t}_{f'\cdot g} + \underbrace{t(\cos t)'}_{f\cdot g'}] \overset{①}{\underset{④}{=}} \underline{\underline{a[\cos t - t\sin t]}}$ (e) $y'(t) = (t\underbrace{R\sin\varphi}_{\text{Zahl}})' \overset{③}{=} R\sin\varphi\,(t)' \overset{①}{=} \underline{\underline{R\sin\varphi}}$

(f) $y'(\varphi) = (tR\sin\varphi)' \overset{③}{=} tR(\sin\varphi)' \overset{④}{=} \underline{\underline{tR\cos\varphi}}$ (g) $z'(\varphi) = \left(\frac{h}{2\pi}\varphi\right)' \overset{③}{=} \frac{h}{2\pi}(\varphi)' \overset{①}{=} \underline{\underline{\frac{h}{2\pi}}}$ (h) $z'(t) = \Big(\underbrace{\frac{h}{2\pi}\varphi}_{\text{Zahl}}\Big)' \overset{①}{=} \underline{\underline{0}}$

(i) $y'(\varphi) = (\underbrace{e^\varphi}_{f}\cdot\underbrace{\sin\varphi}_{g})' \overset{⑤}{=} \underbrace{(e^\varphi)'\sin\varphi}_{f'\cdot g} + \underbrace{e^\varphi(\sin\varphi)'}_{f\cdot g'} \overset{④}{=} \underline{\underline{e^\varphi\sin\varphi + e^\varphi\cos\varphi}}$ (da $(e^\varphi)' = e^\varphi$)

5

(a)

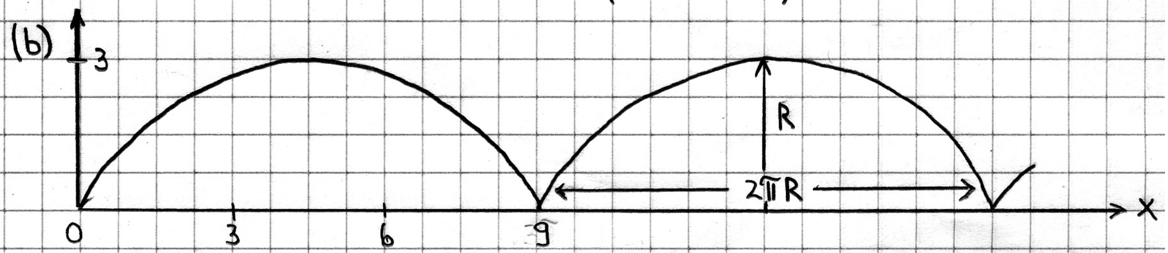


Parameter t: Wälzwinkel, Mittelpunkt $M = (R\cdot t, R)$ ($R\cdot t \mathrel{\hat{=}}$ Bogenlänge)

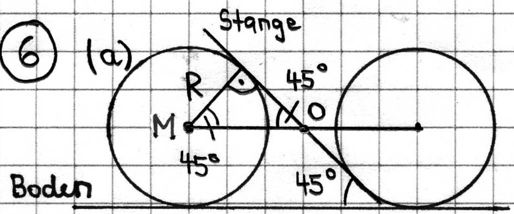
Vektor $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rt - R\sin t \\ R - R\cos t \end{pmatrix}$

$$\gamma: [0,\infty[\to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} Rt - R\sin t \\ R - R\cos t \end{pmatrix}$$

(b)



6 (a)



grösster Abstand: Im gleichschenkligen, rechtwinkligen 45°-45°-Δ:

$$|OM| = \sqrt{R^2+R^2} = \sqrt{2R^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\,R}}$$

Kleinster Abstand: $|OM| = \underline{\underline{R}}$

(b) OB ist Tangente an den Schnittkreis k $\rightsquigarrow$ $XB \perp OB$, ΔXOB ist ein 45°-45°-90°-Δ,

d.h. gleichschenklig: $|OX|^2 = |OB|^2 + \underbrace{|XB|^2}_{=|OB|} = 2|OB|^2$, also $|OX| = \sqrt{2}\,|OB|$

(c) Im $\perp$ ΔOXM gilt: $|OM|^2 = |OX|^2 + |XM|^2 = x^2 + y^2$ ①

OB ist Tangente an die Kugel $\rightsquigarrow$ $MB \perp OB$, ΔMOB ist rechtwinklig

$$\underbrace{|OM|^2}_{① \; x^2+y^2} = \underbrace{|MB|^2}_{R} + \underbrace{|OB|^2}_{ⓑ \; |OX|/\sqrt{2} = \frac{x}{\sqrt{2}}} \quad \leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = R^2 + \frac{x^2}{2} \quad \| -\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = R^2 \quad \| : R^2$$

$$\frac{x^2}{2R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \qquad \text{Vgl. mit } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

γ ist eine Ellipse mit Mittelpunkt O und Halbachsen $a = \sqrt{2}R$ (grösster Abstand)
$b = R$ (kleinster Abstand)

(d) M hat stets den Abstand R von der Stange $\rightsquigarrow$ M liegt auf der Zylinderfläche mit der Stange als Zyl. achse und dem Radius R

M hat stets den Abstand R vom Boden $\rightsquigarrow$ M liegt in der Parallelebene zum Boden mit Abstand R

(also liegt M auf der Schnittkurve von Parallelebene und Zylinderfläche. Dies ist eine Ellipse!)