Übungsserie 2

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 20. November 2009** in der Vorlesung

1. Ein **Wasserstrahl** wird von einer Düse (Koordinatenurprung) schräg zum horizontalen Boden (x-Achse) ausgestossen. Der y-Wert entspricht der Höhe über dem Boden, der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Die Parameterdarstellung für die Bahnkurve eines Wasserteilchens mit der Zeit t als Parameter ist gegeben durch: (g Fallbeschleunigung, T Flugzeit, $0 < \varepsilon < 90°$)

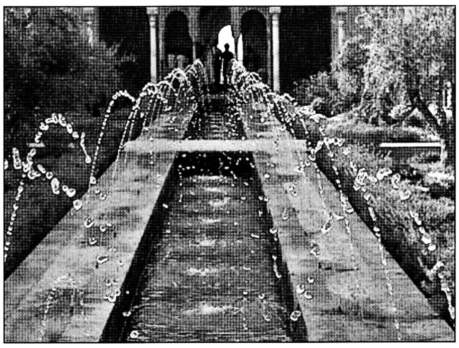
$$\gamma : \; [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \vec{r}\,(t) := \begin{pmatrix} t\,w \cos\varepsilon \\ t\,w \sin\varepsilon - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

   a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor im Kurvenpunkt $\vec{r}(t)$ sowie im Punkt $(0,0)$. Wie schnell schiesst das Wasser aus der Düse? (Rechnerische Begründung.)

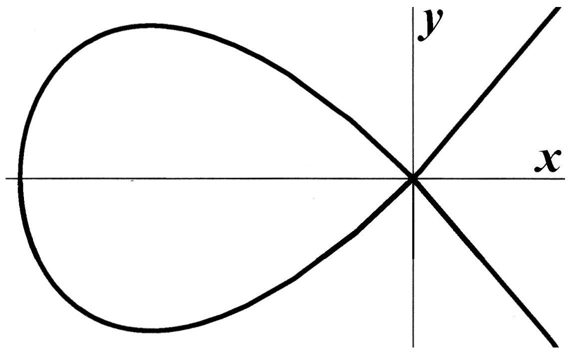
   b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Geschwindigkeitsvektor im Ausstosspunkt $(0,0)$ mit der Horizontalen den Winkel ε einschliesst.

   c) Bestimmen Sie eine Gleichung von γ in der Form $y = f(x)$.

Viele Gartenarchitekten nutzen die Tatsache, dass Wasserstrahlen, die schräg nach oben aus einer Düse austreten, eine parabelförmige Flugbahn aufweisen. Besonders eindrucksvolle Wasserspiele, die darauf basieren, kann man in den Gärten der Alhambra (Figur 1) beobachten. Auch neuzeitliche Architekten nutzen solche Effekte.



Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. Die **Kurve** γ (Figur 2) wird durch die folgende Parameterdarstellung beschrieben:

$$\gamma : \,]-\infty, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \vec{r}\,(t) := \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$$

   a) Zeigen Sie, dass die Kurve γ sich im Ursprung durchdringt.

   b) Weisen Sie nach, dass sie sich unter einem rechten Winkel schneidet.

   c) Berechnen Sie die Abszisse (den x-Wert) des höchsten Punkts der Schleife.

3. In dieser Aufgabe generieren Sie eine **Fläche** S durch Verschieben eines Kreises k entlang einer Parabel p.

   a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung des **Kreises** k mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0,0)$, der in der (x,z)-Ebene liegt und eine Parameterdarstellung der **Parabel** p mit der Gleichung $z = y^2$, die in der (y,z)-Ebene liegt.

   b) Der Kreis k wird nun so **verschoben**, dass sein Mittelpunkt stets auf p liegt und seine Kreisebene parallel zur (x,z)-Ebene bleibt; dabei überstreicht er eine Fläche S. Skizzieren Sie S in einem räumlichen Koordinatensystem und finden Sie eine Parameterdarstellung.

Bitte wenden!

Übungsserie 2

4. Die folgende Parameterdarstellung beschreibt eine **Fläche** S, ein **Konoid**:

$$S:\ (\varphi,t)\longmapsto \vec{r}\,(\varphi,t):=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ t\sin\varphi\\ t\end{pmatrix}\qquad (0\le\varphi<2\pi\,,\ 0\le t\le 1)$$

   a) Skizzieren Sie S in ein räumliches Koordinatensystem durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?

   b) Skizzieren Sie den Umriss der Fläche bei Betrachtung entlang der x-Achse („Aufriss") bzw. entlang der y-Achse („Seitenriss") bzw. entlang der z-Achse („Grundriss").

5. Wenn sich zwei Gänge mit **Tonnengewölben** kreuzen, durchdringen sich zwei Halbzylinder mit gleichen Radien, deren Achsen sich senkrecht schneiden. Seien die x-Achse und die y-Achse die Achsen der beiden Halbzylinder, ihr Radius sei r. Die **Schnittkurven** der Halbzylinder werden dann beschrieben durch:

$$\gamma_{1,2}:\ [0,\pi]\longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t\longmapsto \vec{r}\,(t):=\begin{pmatrix}r\cos t\\ r\cos t\\ r\sin t\end{pmatrix}\quad\text{bzw.}\quad\begin{pmatrix}r\cos t\\ -r\cos t\\ r\sin t\end{pmatrix}$$

   Man kann zeigen, dass γ_1 und γ_2 beide (Halb-)Ellipsen mit den Halbachsen $r\sqrt{2}$ und r sind, die einander in den Nebenscheiteln rechtwinklig schneiden.

   a) Skizzieren Sie beide Halbzylinder und Schnittkurven in ein räumliches Koordinatensystem.

   b) Zeigen Sie, dass ein allgemeiner Kurvenpunkt $\vec{r}(t)$ von γ_1 von der x-Achse bzw. von der y-Achse den Abstand r hat. (D.h. er liegt auf beiden Halbzylindern.)

   c) Skizzieren Sie die Projektionen von γ_1, γ_2 auf die (x,y)-Ebene (Grundrisse) in ein ebenes Koordinatensystem. Um was für Kurven handelt es sich?

   d) Welchen Neigungswinkel bezüglich der Vertikalen hat die Kurve γ_1 auf halber Höhe des Gewölbes? (Zur Vereinfachung der Rechnung kann $r=1$ gesetzt werden.)

6. **Vektorprodukttraining:** Berechnen Sie: (a) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}R\\ 0\\ \frac{h}{2\pi}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ R\\ 0\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}t_0R\cos\varphi_0\\ t_0R\sin\varphi_0\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-R\sin\varphi_0\\ R\cos\varphi_0\\ h\end{pmatrix}$

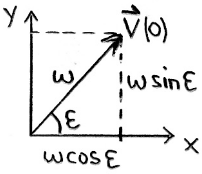
   Berechnen Sie ferner $\vec{s}\times\vec{t}$, wobei $\vec{s}$ die Ableitung von $\vec{r}\,(\varphi,t)$ nach φ, und $\vec{t}$ die Ableitung von $\vec{r}\,(\varphi,t)$ nach t bedeutet, für (c) $\vec{r}\,(\varphi,t)=\begin{pmatrix}t\cos\varphi\\ t\sin\varphi\\ t\varphi\end{pmatrix}$ und (d) $\vec{r}\,(\varphi,t)=\begin{pmatrix}2\cos\varphi\\ t\\ t^2+2\sin\varphi\end{pmatrix}$

1 (a) $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} w\cos\varepsilon \\ w\sin\varepsilon - g\cdot t \end{pmatrix}$, $t \hat{=}$ Zeit, im Punkt $(0,0)$ ist $t=0$: $\vec{v}(0) = \vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} w\cos\varepsilon \\ w\sin\varepsilon \end{pmatrix}$

Schnelligkeit in $(0,0)$: $v(0) = |\vec{v}(0)| = \left|\begin{pmatrix} w\cos\varepsilon \\ w\sin\varepsilon \end{pmatrix}\right| = \sqrt{w^2\cos^2\varepsilon + w^2\sin^2\varepsilon} = \sqrt{w^2\underbrace{(\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon)}_{=1}} = \underline{w}$

(b) $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} w\cos\varepsilon \\ w\sin\varepsilon \end{pmatrix}$, x-Richtung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für den Zwischenwinkel α gilt $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} w\cos\varepsilon \\ w\sin\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} w\cos\varepsilon \\ w\sin\varepsilon \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{w\cos\varepsilon}{w\cdot 1} = \cos\varepsilon$, d.h. $\underline{\alpha = \varepsilon}$



(c) $x(t) = tw\cos\varepsilon \rightarrow t = \dfrac{x}{w\cos\varepsilon}$ in $y(t)$

$y(t) = tw\sin\varepsilon - \frac{1}{2}gt^2$

$\rightarrow y = \dfrac{x}{w\cos\varepsilon}w\sin\varepsilon - \dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{w^2\cos^2\varepsilon} = \underline{\underline{x\tan\varepsilon - \dfrac{g}{2w^2\cos^2\varepsilon}\cdot x^2}}$ Parabel!

---

2 (a) t-Werte von Kurvenpunkten im Ursprung: $\left.\begin{array}{l} 0 \overset{\text{Soll}}{=} x(t) = t^2 - 1 \\ 0 \overset{\text{Soll}}{=} y(t) = t^3 - t \end{array}\right\} \rightsquigarrow t = \pm 1$

$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r}(-1)$, also eine Selbstdurchdringung in $(0,0)$

(b) Tangentialvektor: $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-1 \end{pmatrix}$, für $t=-1$: $\vec{r}\,'(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t=1$: $\vec{r}\,'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\vec{r}\,'(-1)}_{\neq \vec{0}} \cdot \underbrace{\vec{r}\,'(1)}_{\neq \vec{0}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0 \rightsquigarrow$ Schnittwinkel ist $\underline{\underline{90°}}$

(c) Im "höchsten" Punkt der Schleife ist $\vec{r}\,'(t)$ horizontal: $0 \overset{\text{Soll}}{=} 3t^2 - 1 = y'(t) \Leftrightarrow 3t^2 = 1$

$\rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\quad x\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$

---

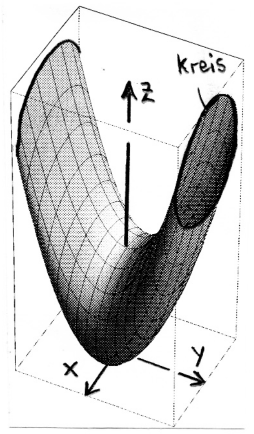
3 (a) Kreis K mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0,0)$: $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 0 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

Parabel p: $z = y^2$. Setze $y = t \rightsquigarrow x = 0, y = t, z = t^2$: $t \mapsto \vec{r}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}}_{\text{in (b) Mittelpunkt } M_t \text{ von K}}$ $\quad -\infty < t < \infty$

(b)

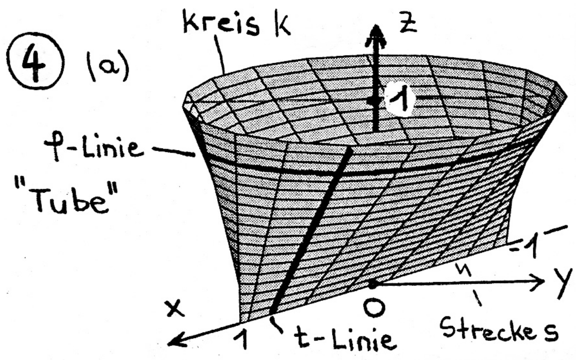
Kreis K bez M_t: $\overrightarrow{M_tP} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 0 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}$, bez O: $\vec{r}(\varphi,t) = \overrightarrow{OM_t} + \overrightarrow{M_tP} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 0 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}$

Also: $S: (\varphi,t) \longmapsto \vec{r}(\varphi,t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ t \\ t^2 + 2\sin\varphi \end{pmatrix}}}$ $\quad (0 \le \varphi \le 2\pi, -\infty < t < \infty)$



---

4 (a)



φ-Linie zu $t=0$: $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi,0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Geradenstück auf der x-Achse von -1 bis 1

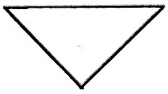
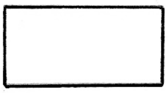
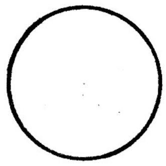
φ-Linie zu $t=1$: $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi,1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ Kreis mit Mittelpunkt $(0,0,1)$ parallel zur (x,y)-Ebene mit Radius 1

Allg. φ-Linie: $\varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi,t_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ t_0\sin\varphi \\ t_0 \end{pmatrix}$ Ellipse mit Mittelpt $(0,0,t_0)$ und Halbachsen $a=1$, $b=t_0$ parallel zur (x,y)-Ebene

t-Linie zu $\varphi=0$: $t \longmapsto \vec{r}(0,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ Geradenstück bei $x=1$ parallel zur z-Achse

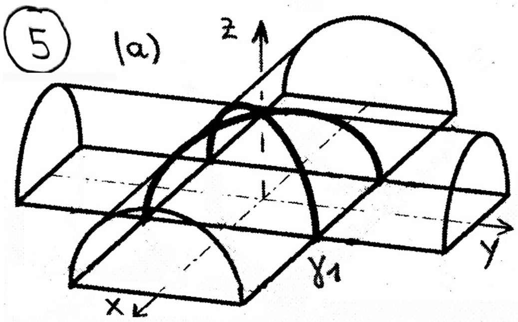
Allg t-Linie: $t \longmapsto \vec{r}(\varphi_0,t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Geradenstück parallel (y,z)-Ebene

Fazit: t-Linien: Geradenstücke (parallel (y,z)-Ebene), φ-Linien: Ellipsen um die z-Achse

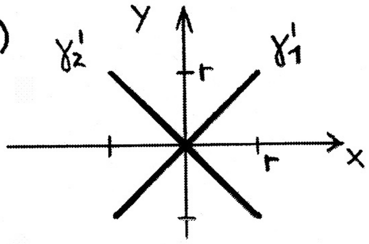
(b) Entlang x-Achse: (gleichschenkliges Δ)  Entlang y-Achse: (Rechteck)  Entlang z-Achse: (Kreis) 

---

5 (a)



(c)



$$\gamma_1' : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} \; y = x$$

$\rightsquigarrow$ Strecke!

(b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$

Abstandsvektor von der x-Achse

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \leftarrow \text{kein x-Unterschied}$$

$$|\vec{r}_x| = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = \sqrt{r^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}} = \underline{\underline{r}}$$

Abstandsvektor von der y-Achse

$$\vec{r}_y = \begin{pmatrix} r\cos t \\ 0 \\ r\sin t \end{pmatrix} \leftarrow \text{kein y-Unterschied}$$

$$|\vec{r}_y| = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = \underline{\underline{r}}$$

(d) Halbe Höhe: $z(t) = r\sin t \overset{\text{soll}}{=} \frac{1}{2}r$, d.h. $\sin t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} r(-\sin t) \\ r(-\sin t) \\ r\cos t \end{pmatrix} \underset{r=1}{\overset{t=\frac{\pi}{6}}{\downarrow}} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Vertikale: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\left(\,''\,\right)\right\| \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot 1}$$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\alpha = 39.29^\circ}} \neq 45^\circ$

---

6 (a)

$$\begin{pmatrix} \cancel{-\frac{1}{2}R} \\ 0 \\ h/2\pi \\ -\frac{1}{2}R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ R \\ 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - R \cdot h/2\pi \\ 0 - 0 \\ -\frac{1}{2}R \cdot R - 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi}Rh \\ 0 \\ -\frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}}}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} \cancel{t_0 R\cos\varphi_0} \\ t_0 R\sin\varphi_0 \\ 0 \\ t_0 R\cos\varphi_0 \\ t_0 R\sin\varphi_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{-R\sin\varphi_0} \\ R\cos\varphi_0 \\ h \\ -R\sin\varphi_0 \\ R\cos\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 R\sin\varphi_0 \cdot h - 0 \\ 0 - h \cdot t_0 R\cos\varphi_0 \\ \underbrace{t_0 R^2\cos^2\varphi_0 + t_0 R^2\sin^2\varphi_0}_{t_0 R^2 \underbrace{(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0)}_{=1}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} t_0 R\sin\varphi_0 \cdot h \\ -t_0 R\cos\varphi_0 \cdot h \\ t_0 R^2 \end{pmatrix}}}$$

(c) $\vec{s} = \begin{pmatrix} -t \cdot \sin\varphi \\ t \cdot \cos\varphi \\ t \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}$,

$$\vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} \cancel{-t \cdot \sin\varphi} \\ t \cdot \cos\varphi \\ t \\ -t \cdot \sin\varphi \\ t \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{\cos\varphi} \\ \sin\varphi \\ \varphi \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \cdot \varphi - t\sin\varphi \\ t\cos\varphi + \varphi t\sin\varphi \\ \underbrace{-t\sin^2\varphi - t\cos^2\varphi}_{-t(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \varphi t\cos\varphi - t\sin\varphi \\ \varphi t\sin\varphi + t\cos\varphi \\ -t \end{pmatrix}}}$$

(d) $\vec{s} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 0 \\ 2\cos\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$,

$$\vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} \cancel{-2\sin\varphi} \\ 0 \\ 2\cos\varphi \\ -2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 1 \\ 2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2\cos\varphi \\ 0 + 2t \cdot 2\sin\varphi \\ -2\sin\varphi - 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ 4t\sin\varphi \\ -2\sin\varphi \end{pmatrix}}}$$