Übungsserie 3

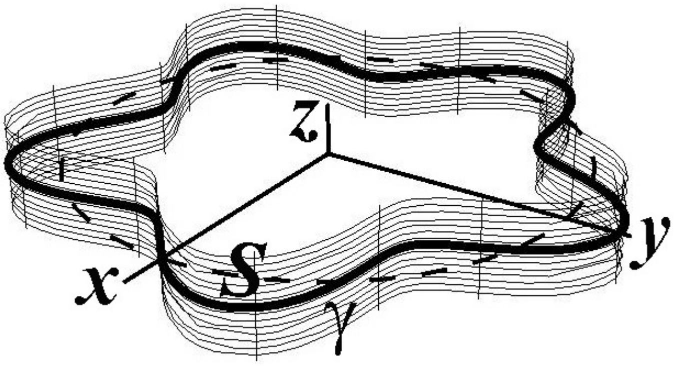
Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 26. Februar 2010** in der Vorlesung

1. Figur 1 zeigt eine (parallel zur z-Achse verlaufende, in beide Richtungen unbegrenzte) **Fläche** S. Die hervorgehobene Leitkurve γ verläuft in der (x, y)-Ebene und oszilliert „sinusförmig" mit radialen Abweichungen ± 1 um die kreisförmige, gestrichelte Mittellinie vom Radius 5. (Dabei wiederholt sie sich zehnmal, bevor sie sich wieder schliesst.)

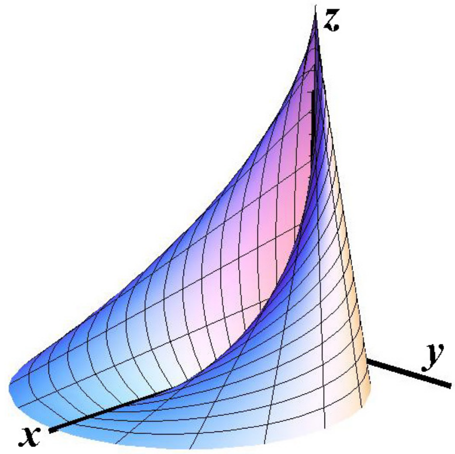
   a) Was für eine Fläche ist S? (kurze Begründung ohne Rechnung)

   b) Wie lautet eine mögliche Parameterdarstellung von γ?

   c) Wie lautet eine mögliche Parameterdarstellung von S?



Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 3)

2. In dieser Aufgabe **generieren** Sie eine **Fläche** S durch Bewegen und Verkleinern der Kurve γ. γ ist ein horizontaler Kreis mit Mittelpunkt in $(0, 0, 2)$ und Radius 1.

   a) Wie lautet eine Parameterdarstellung des Kreises γ?

   b) Wird der Kreis γ in gleichbleibender horizontaler Lage vertikal nach unten bis nach $(0, 0, 0)$ verschoben und dabei gleichmässig verkleinert (d.h. der Radius nimmt linear auf 0 ab), überstreicht er eine Fläche S. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von S.

   c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.

   d) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$.

   e) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung mithilfe der Parameterdarstellung aus Teilaufgabe (b))
   Ist die Fläche S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem Resultat aus Teilaufgabe (d))

3. Durch die folgende Parameterdarstellung wird die **Fläche** S in Figur 2 beschrieben

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) := \begin{pmatrix} t\cos\varphi + t \\ t\sin\varphi \\ 2\sin(\frac{\varphi}{2})(1-t) \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le t \le 1)$$

   a) Ermitteln Sie die φ-Linien zu $t = 0$ und $t = 1$. Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)

   b) Ermitteln Sie die t-Linie zu $\varphi = 0$. Was für Kurven sind die t-Linien?

   c) Ist S eine Regelfläche? Ist S abwickelbar? (Kurze Begründungen ohne Rechnung)

   d) Die Kurve γ (φ-Linie zu $t = \frac{1}{2}$) von S verläuft auf der Kugel um $(0, 0, 0)$ mit Radius 1. Zeigen Sie dies! Verwenden Sie: $[\sin(\frac{\varphi}{2})]^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$

Bitte wenden!

Übungsserie 3

4. Eine Gerade g, welche die x-Achse an der Stelle 1 senkrecht unter 45° bezüglich der z-Achse schneidet (vgl. Skript zur Vorlesung S. 42 Figur 1.65) wird an der z-Achse gespiegelt. Verbindet man jeden Punkt A der Geraden g mit dem entsprechenden Spiegelpunkt $\tilde{A}$ der Spiegelgeraden $\tilde{g}$ entsteht durch die Schar dieser Verbindungslinien eine **Fläche** S.

   a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem g, $\tilde{g}$ sowie die Fläche S mithilfe einiger Verbindungslinien. Wie verlaufen die Verbindungslinien in Bezug zur (x, y)-Ebene?

   b) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche S mit den Parametern s und t.

   c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)

   d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.

   e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$. Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat)

1

a) Verallgemeinerte Zylinderfläche (Regelfläche)

b) Mittellinie: Kreis mit $r=5$ um $(0,0,0)$, $z=0$

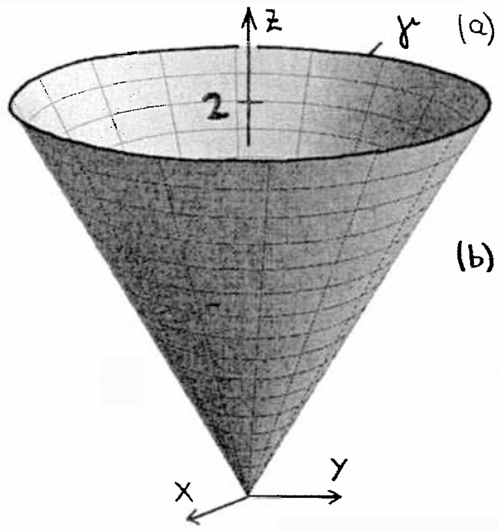
$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5\cos\varphi \\ 5\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Radius r oszilliert mit ± 1 um 5: $r = 5 + 1\cdot\sin(5\varphi)$ — 5 Wiederholungen (z.B. +1)

$$\gamma: \varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} (5+\sin(5\varphi))\cos\varphi \\ (5+\sin(5\varphi))\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

c) $$S: (\varphi, t) \mapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} (5+\sin 5\varphi)\cos\varphi \\ (5+\sin 5\varphi)\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < t < \infty)$$

2



(a) $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ (Kurvenparameter φ)

Radius $r=1$, Horizontal mit Höhe $z=2$

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

(b) Bewegungsparameter t $(0 \le t \le 1)$

Höhe z linear mit t von 2 nach 0: $z(t) = 2 - 2t = 2(1-t)$

Radius r linear mit t von 1 nach 0: $r(t) = 1 - t$

(oder $0 \le \tilde{t} \le 2$, $z(\tilde{t}) = 2 - \tilde{t}$, $r(\tilde{t}) = 1 - 0.5\tilde{t}$ oder ...)

$$S: (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} (1-t)\cos\varphi \\ (1-t)\sin\varphi \\ 2(1-t) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix}$$

(c) $x = (1-t)\cos\varphi$, $y = (1-t)\sin\varphi$, $z = 2(1-t) \rightsquigarrow (1-t) = \frac{z}{2}$

$$x^2 + y^2 = (1-t)^2\underbrace{[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]}_{\equiv 1} = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \longleftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$$

(d) $$\vec{s} = \vec{r}_{t_0}^{\,\prime}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -(1-t_0)\sin\varphi_0 \\ (1-t_0)\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \vec{r}_{\varphi_0}^{\,\prime}(t_0) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -2(1-t_0)\cos\varphi_0 \\ -2(1-t_0)\sin\varphi_0 \\ (1-t_0)[\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0] \end{pmatrix} = (1-t_0)\begin{pmatrix} -2\cos\varphi_0 \\ -2\sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) S ist Regelfläche, denn die t-Linien sind Geradenstücke

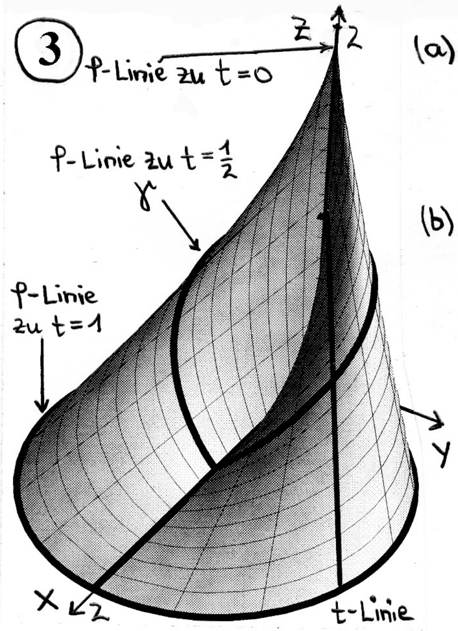
$$\begin{pmatrix} (1-t)\cos\varphi \\ (1-t)\sin\varphi \\ 2(1-t) \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix} = t^*\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 1 \ge t^* \ge 0$$

Par'drst. einer Geraden!

S entsteht durch entlang führen einer Geraden durch $(0,0,0)$ an γ → kreiskegelstück

S ist abwickelbar: $\vec{n} = \underbrace{(1-t_0)}_{\text{verändert nur die Länge von } \vec{n}} \underbrace{\begin{pmatrix} -2\cos\varphi_0 \\ -2\sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtung!}}$ ist in seiner Richtung unabhängig von t, d.h. die Richtung von $\vec{n}$ ist konstant entlang einer t-Linie.

3



(a) $t=0$: $\vec{r}(\varphi)=\begin{pmatrix}0\\0\\2\sin\varphi/2\end{pmatrix}$ wobei $0\le 2\sin\frac{\varphi}{2}\le 2$ ($\varphi=0$, $\varphi=2\pi$) $\rightsquigarrow$ Geradenstück $(0,0,0)$ zu $(0,0,2)$

$t=1$: $\vec{r}(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi+1\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ Kreis mit Mittelpt $(1,0,0)$ und Radius $r=1$ in der (x,y)-Ebene.

(b) $\varphi=0$, $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}2t\\0\\0\end{pmatrix}$ wobei $0\le 2t\le 2$ $\rightsquigarrow$ Geradenstück von $(0,0,0)$ zu $(2,0,0)$

allg. $\vec{r}(\varphi,t)=\begin{pmatrix}0\\0\\2\sin\varphi/2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\cos\varphi+1\\\sin\varphi\\-2\sin\varphi/2\end{pmatrix}$ t-Linien sind Geradenstücke (von der z-Achse zum Kreis in der (x,y)-Ebene)

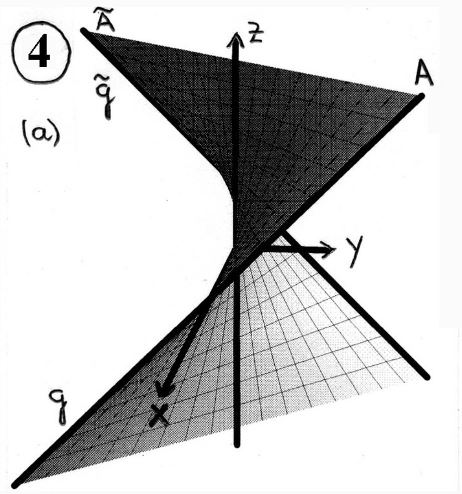
(c) S entsteht durch Bewegung eines Geradenstücks (der eine Endpunkt bleibt fest auf der z-Achse, der andere auf dem Kreis in der (x,y)-Ebene)
$\longrightarrow$ Schar gerader Linien, <u>S ist Regelfläche</u>
<u>S ist nicht abwickelbar</u> (Drehung der Tangentialebene entlang der hervorgehobenen t-Linie)

(d) zu zeigen: γ liegt auf Kugel, d.h. $|\vec{r}(\varphi,\frac{1}{2})|=1$ bzw. $|\vec{r}(\varphi,\frac{1}{2})|^2=1^2$

$$|\vec{r}(\varphi,\tfrac{1}{2})|^2=\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\sin\varphi\\\sin\varphi/2\end{pmatrix}\right|^2=\left(\tfrac{1}{2}\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\sin\varphi\right)^2+\left(\sin\tfrac{\varphi}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\cos^2\varphi+2\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\cos\varphi+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sin^2\varphi+\overbrace{\tfrac{1}{2}(1-\cos\varphi)}^{\text{Tipp!}}$$

$$=\tfrac{1}{4}\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{\equiv 1}+\cancel{\tfrac{1}{2}\cos\varphi}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}-\cancel{\tfrac{1}{2}\cos\varphi}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}=\underline{1}$$

4



(a) Die Verbindungslinien verlaufen parallel zur (x,y)-Ebene

(b) $q:\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\t\\t\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Punkt A_t auf Gerade q: $A_t=(1,t,t)$ (Skript S.42)

Spiegelpunkt $\tilde{A}_t$: $\tilde{A}_t=(-1,-t,t)$, Verbindungsvektor $\overrightarrow{A_t\tilde{A}_t}=\begin{pmatrix}-2\\-2t\\0\end{pmatrix}$

Für einen Flächenpunkt auf der Verbindungslinie $A_t\tilde{A}_t$ gilt:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OA_t}+s\overrightarrow{A_t\tilde{A}_t}=\begin{pmatrix}1\\t\\t\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-2t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2s\\t-2st\\t\end{pmatrix}\qquad 0\le s\le 1$$

Fläche S: $(s,t)\longmapsto\vec{r}(s,t)=\begin{pmatrix}1-2s\\t-2st\\t\end{pmatrix}$ $0\le s\le 1$ (od. $-\infty<s<\infty$), $-\infty<t<\infty$

(c) S entsteht durch Bewegung eines Geradenstücks (der eine Endpt auf q, der andere auf $\tilde{q}$) $\longrightarrow$ Schar gerader Linien, S ist Regelfläche

(d) $x=1-2s$, $s=\frac{1-x}{2}$; $y=t-2st=z-2\cdot\frac{1-x}{2}\cdot z=z-(1-x)z=z-z+xz=xz$
$z=t$
Koord.glch.: $\underline{y=xz}$

(e) $\vec{s}=\vec{r}\,'_{t_0}(s_0)=\begin{pmatrix}-2\\-2t_0\\0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{t}=\vec{r}\,'_{s_0}(t_0)=\begin{pmatrix}0\\1-2s_0\\1\end{pmatrix}$ $\quad\vec{n}=\vec{s}\times\vec{t}=\begin{pmatrix}-2\\-2t_0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1-2s_0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2t_0\\2\\-2+4s_0\end{pmatrix}$

<u>Nicht</u> abwickelbar! Richtung von $\vec{n}$ ändert entlang horizontaler s-Linie (Verbind. linie)

z.B. s-Linie zu $t=1$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2+4s\end{pmatrix}$ $\leftarrow$ ändert!