Studiengang Architektur — Mathematisches Denken — FS 2010

Übungsserie 4

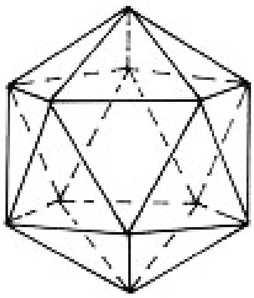
Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 16. April 2010** in der Vorlesung

1. **Platonische Körper**

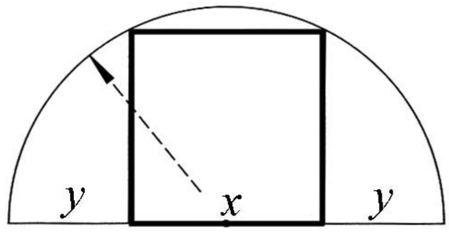
   (a) Welche Gemeinsamkeiten haben (a1) das reguläre Tetra-, Okta- und Ikosaeder, und welche Gemeinsamkeiten haben (a2) das reguläre Tetra-, Dodekaeder und der Würfel?

   (b) Welche Platonischen Körper sind punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt?

   (c) Figur 1 zeigt in der *Ansicht von oben* ein reguläres Ikosaeder, welches mit einer Seitenfläche auf dem Boden steht. Skizzieren Sie ebenso einen Würfel, ein reguläres Tetra-, Okta- und Dodekaeder.



Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 2)

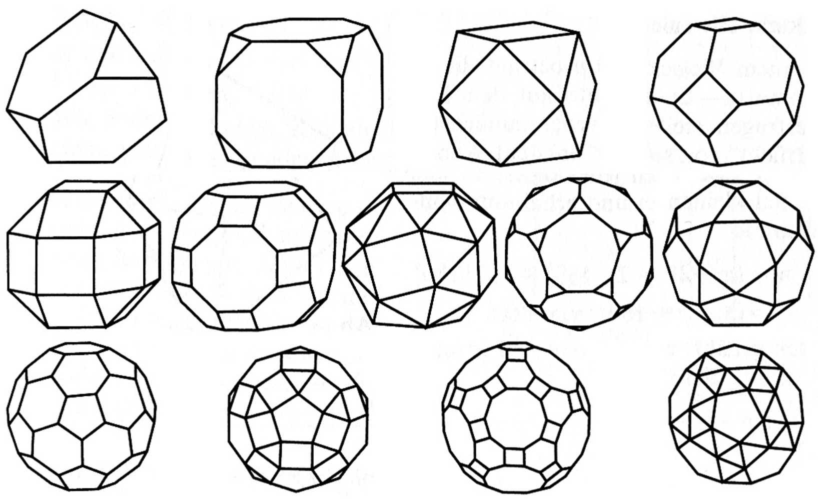
2. Auf einem **halbkreisförmigen Grundstück** wird ein Gebäude mit quadratischem Grundriss errichtet (Figur 2). Dieses unterteilt den Durchmesser in Abschnitte der Längen x und y. Berechnen Sie das Verhältnis $x : y$. Kommentar zum Verhältniswert?

3. Verbindet man alle Punkte eines ebenen n-Ecks mit den entsprechenden Punkten eines (räumlich) parallel verschobenen, kongruenten n-Ecks, entsteht ein n-seitiges **Prisma**.

   (a) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen (ausgedrückt durch n) hat ein solches Prisma? Verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel!

   (b) Skizzieren Sie ein Prisma, das *kombinatorisch regulär* aber nicht regulär ist sowie ein Prisma, das *nicht konvex* ist.

   (c) Unter welcher Voraussetzung an die Grundfläche ist das Prisma konvex?



Die 13 Archimedischen Körper. (keine Aufgabe dazu)
Im Gegensatz zu PLATON hat ARCHIMEDES die Körper selber gefunden.

Hearst Tower von NORMAN FOSTER, New York City

Bitte wenden!

Übungsserie 4

4. Ein reguläres **Tetraeder** wird durch gleichseitige Dreiecke begrenzt. Verbindet man die Mittelpunkte (Schwerpunkte) dieser gleichseitigen Dreiecke, entsteht ein kleinerer Körper. (Bem: Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie, hier die Seitenflächenhöhe, im Verhältnis 2:1.)

   (a) Um was für einen Körper handelt es sich?

   (b) Wie gross ist das Verhältnis der Oberflächeninhalte vom kleineren Körper zum ursprünglichen Tetraeder?

   (c) Wie gross ist das Verhältnis der Volumeninhalte?

5. Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus lauter Quadraten und / oder regulären Fünfecken aufgebaut sind.

   (a) Zeichnen Sie einen solchen Körper bestehend aus zwei Fünfecken und fünf Quadraten.

   (b) Zeigen Sie durch Überprüfen aller Möglichkeiten, dass bei solchen Polyedern, die nur aus lauter Quadraten und / oder regulären Fünfecken aufgebaut sind, in jeder Ecke nicht mehr als drei Kanten zusammenstossen können. (D.h. solche Polyeder besitzen nur dreikantige Ecken.)

   (c) Bestimmen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel eine Bedingung über die Anzahl Quadrate und die Anzahl Fünfecke eines solchen Körpers. Zählen Sie alle möglichen Lösungen dieser Bedingung (Gleichung) in einer kleinen Tabelle auf.

6. Von einem regulären Oktaeder werden alle sechs 'Ecken' abgeschnitten, so dass ein **Oktaederstumpf** entsteht, welcher durch acht reguläre Sechsecke und sechs Quadrate der Seitenlänge a begrenzt wird (Figur 3).

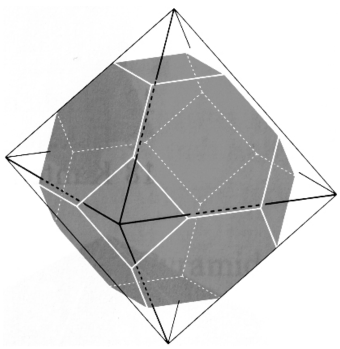
   (a) Der Oktaederstumpf stehe mit einem Quadrat auf der Grundrissebene. Skizzieren Sie die Ansicht von oben. (Achten Sie in der Skizze auf korrekte Winkel & Streckenverhältnisse.)

   (b) Wie gross ist das Volumen des Oktaederstumpfs (ausgedrückt durch a)?

   (c) Der Oktaederstumpf besitzt eine Umkugel. Berechnen Sie den Umkugelradius R.

   (d) Besitzt der Oktaederstumpf auch eine Kantenmittenkugel? (Falls „ja" berechnen Sie ihren Radius!) Die Kantenmittenkugel eines Körpers geht durch alle Kantenmitten des Körpers.

   (e) Werden alle Quadratflächen des Oktaederstumpfs zu Ebenen ausgeweitet, ergeben deren Schnittlinien einen weiteren Körper, der den Oktaederstumpf enthält. Welcher Körper ist das?



Figur 3 (Aufgabe 6)

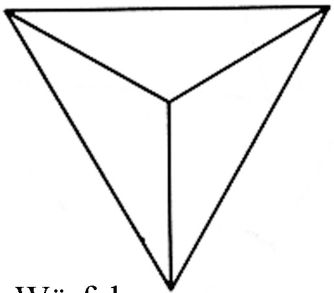
Übungsserie 4 FS 2010 Seite 1

① (a1) Sie bestehen alle aus gleichseitigen Dreiecken (sie sind auch Dreieckskörper)

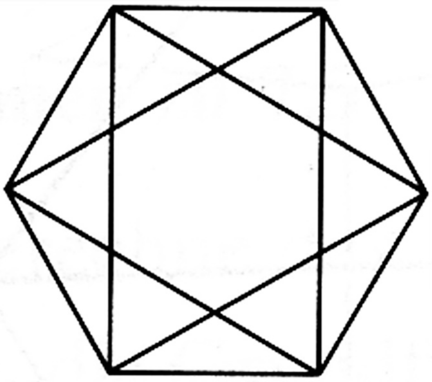
(a2) Sie besitzen alle nur dreikantige Ecken (Ecken, in denen genau 3 Kanten zusammenstossen)

(b) Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder, d.h. alle ausser das Tetraeder

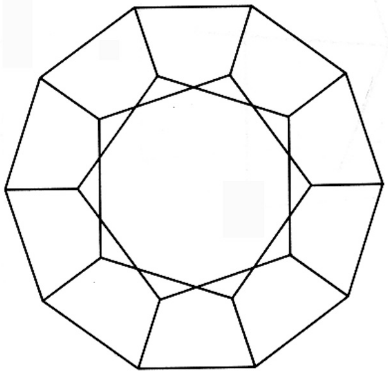
(c) Tetraeder



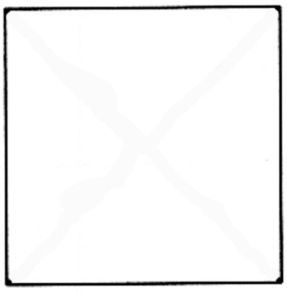
Oktaeder



Dodekaeder



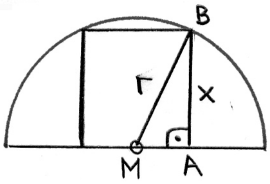
Würfel



---

② Pythagoras im ⊾-MAB: $r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2$ mit $r = \frac{x}{2} + y$

(oder Höhensatz (Halbkreis=Thales...) $(y+x)\cdot y = x^2$)



$\cancel{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + 2\frac{x}{2}y + y^2 = \cancel{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + x^2$

$0 = x^2 - xy - y^2 \quad \| : y^2$

$0 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1$

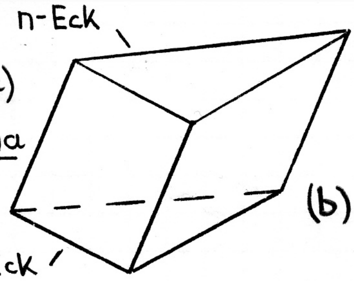
Setze $\lambda = \frac{x}{y}$ (oder $y = 1$): $0 = \lambda^2 - \lambda - 1 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \ ↯\right)$

Kommentar: Verhältnis des GS!

---

③ (a) Prisma

n-Eck

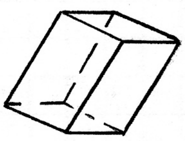


n-Eck

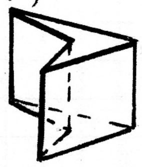
$e = n + n = \underline{\underline{2n}}$ (Anzahl Ecken), $k = n + n + n = \underline{\underline{3n}}$ (Anzahl Kanten), $f = 1 + n + 1 = \underline{\underline{n+2}}$ (Anzahl Flächen)

Eulersche Formel: $e - k + f = 2n - 3n + n + 2 = \underline{\underline{2}}$ (stimmt)

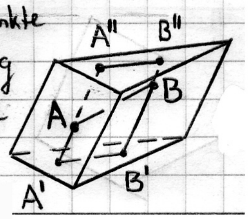
(b) kombinatorisch regulär ⇝ lauter Vierecke (kein Würfel)



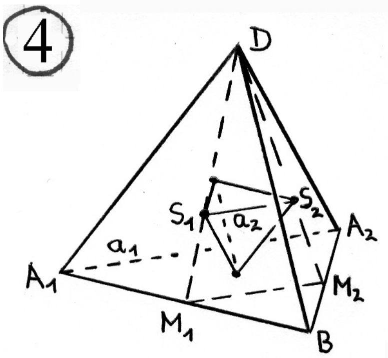
nicht konvex ⇝ nicht konvexes n-Eck



(c) Das ebene n-Eck (die Grundfläche) muss konvex sein! [Sind A, B zwei beliebige Punkte des Körpers; A', B' und A'', B'' die Projektionen von A, B entlang der Verschiebungsrichtung auf die "Endflächen", so gehören A'A'', B'B'' zum Körper und A'B' zur Grundfläche bzw. A''B'' zur Deckfläche (da diese konvex sind). ⇝ AB muss zum Körper gehören.]



4



(a) reguläres Tetraeder (verkleinert)

(b) $|M_1M_2| = \frac{1}{2}|A_1A_2| = \frac{1}{2}a_1$ (ΔM_1BM_2 ist eine massstäbl. Verkleinerung d. ΔA_1BA_2 mit Faktor $1/2$ da M_1, M_2 Kantenmitten sind.)

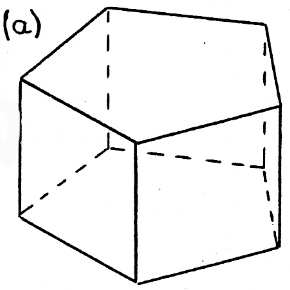
$a_2 = |S_1S_2| = \frac{2}{3}|M_1M_2| = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1$ (ΔDS_1S_2 ist eine massstäbl. Verkleinerung d. ΔDM_1M_2 mit Faktor $2/3$ da S_1, S_2 Schwerpunkte sind.)

$\rightsquigarrow$ Längenfaktor: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3} = \lambda$ $\rightsquigarrow$ Flächenfaktor: $\lambda^2 = \frac{1}{9}$ (Verhältnis Oberfläche$_2$ zu Oberfläche$_1$)

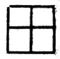
(c) Volumenfaktor: $\lambda^3 = 1/27$ (Volumenverhältnis)

5

(a)



(b) Innenwinkel im Quadrat: $90°$, im reg. Fünfeck: $\frac{1}{5}(5-2)\cdot 180° = 108°$

Mehr als 3 Kanten bedeutet in einer Eckfigur stossen mehr als 3 Flächen zusammen, im "günstigsten" Fall $(108° > 90°)$ 4 Quadrate:  $4\cdot 90° = 360°$!

Dies ist keine Eckfigur und alle weiteren Fälle erst recht nicht.

(Zusatz: Möglich sind 3 5-Ecke, 2 5-Ecke & 4-Eck, 5-Eck & 2 4-Ecke, 3 4-Ecke)

(c) f_4; f_5: Anzahl Quadrate bzw. reguläre 5-Ecke; $e - k + f = 2$ Eulersche Polyederformel

① $3e = 2k$ (In jeder Ecke stossen 3 Kanten zusammen (siehe (b)), jede Kante wird dabei zweimal gezählt)

② $4f_4 + 5f_5 = 2k$ (Jede 4-Eckfläche hat 4 Kanten, jede 5-Eckfläche 5; jede Kante wird 2× gezählt)

③ $f_4 + f_5 = f$

$$\underline{2} = e - k + f \overset{①}{=} \underbrace{\left(\tfrac{2}{3}k - k\right)}_{= -\frac{1}{3}k} + f = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{2}f_4 + \frac{5}{2}f_5\right) + f_4 + f_5 = \frac{1}{3}f_4 + \frac{1}{6}f_5 \quad \| \cdot 6$$

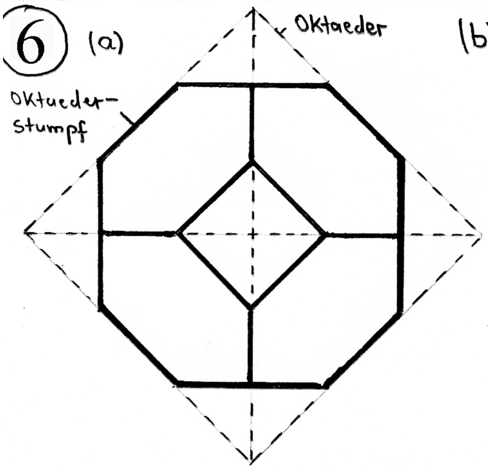
$$\underline{\underline{12 = 2f_4 + f_5}}$$

Anz 4-Ecke	Anz 5-Ecke
6	0
5	2
4	4
3	6
2	8
1	10
0	12

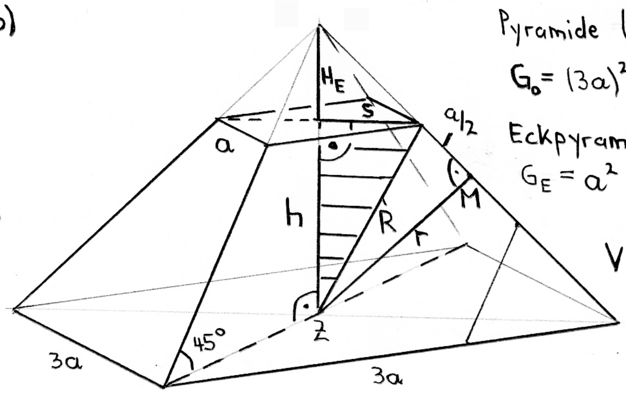
Zusatz: Nicht alle Lösungen müssen existieren!

6

(a)



(b)



Pyramide (halbes Oktaeder)

$G_o = (3a)^2 = 9a^2$, $H_o = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ (45°-90°-Dreieck)

Eckpyramide:

$G_E = a^2$, $H_E = \frac{a}{\sqrt{2}}$ $\left(= \frac{1}{3}H_o\right)$

$V = 2V_o - 6V_E = 2\cdot\frac{1}{3}G_oH_o - 6\cdot\frac{1}{3}G_EH_E$

$= \frac{2}{3}9a^2\frac{3a}{\sqrt{2}} - 2a^2\frac{a}{\sqrt{2}}$

$= 9\sqrt{2}a^3 - \sqrt{2}a^3 = \underline{\underline{8\sqrt{2}a^3}}$

(c) Im markierten rechtwinkligen Dreieck gilt: $\Big\}$ $h = \frac{3a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}a = \sqrt{2}a$ $\quad R = \sqrt{h^2 + s^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}a^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}a = \underline{\underline{\frac{a}{2}\sqrt{10}}}$

$s = H_E = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(d) Ja. Jede Verbindung vom Zentrum Z mit einer Kantenmitte M führt zu einem rechtwinkligen Dreieck mit Hyp. R und Kath. $a/2$: $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot 10 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \underline{\frac{3}{2}a}$

(e) Ein Würfel